الجـــــــــــــــــــــــــــــمـهـوريـــــة الجـــــــــــــــزائـريـة الديمـــــــقـراطيـة الـشـــــــــــعبيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التـــــــــعـليـم العـــــــالي والبـــــــــــحث العـــــلـمـــي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جـــامعة الدكتـــور الطاهـــــر مـــولاي سعيـــــــدة–

Université Saida Dr Tahar Moulay –

Faculté de TECHNOLOGIE

MEMOIRE

Mémoire de fin d'études présenté pour l'obtention du Diplôme de MASTER

En : Automatique

Option : Automatique et Systèmes

Par :

Cherifi Abd El Kader Dhiya Eddine

Thème

Model Predictive Control for Nonlinear Inverted Pendulum with Disturbance

Soutenue publiquement en **29/06/2025** devant le jury :

Dr. MEKKAOUI Mohamed	Univ. Saida	Président
Dr. MRAH Abdelkader	Univ. Saida	Examinateur
Dr. LABANE Chrif	Univ. Saida	Encadrant

Année universitaire 2024/2025

Résumé

Ce mémoire porte sur la stabilisation d'un système non linéaire à travers des techniques de commande avancées, le pendule inversé monté sur un chariot, à l'aide de la Commande Prédictive par Modèle (MPC). La première partie est consacrée à la modélisation dynamique du système à l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange. Ensuite, les fondements théoriques de la commande prédictive, dans ses versions linéaire et non linéaire, sont exposés en mettant en évidence leurs avantages, leur historique, ainsi que leurs limites. Enfin, une implémentation pratique de la MPC est réalisée sur le système, avec des simulations testant sa robustesse et son efficacité en présence de perturbations et dans des conditions initiales variées. Les résultats démontrent la performance de la MPC, notamment la version non linéaire (NMPC), dans des environnements complexes.

Mots-clés : pendule inversé, commande prédictive, MPC, NMPC, modélisation, stabilité, système non linéaire.

Abstract

This thesis focuses on the stabilization of a nonlinear system through advanced control techniques, the inverted pendulum on a cart, using Model Predictive Control (MPC). The first part deals with the dynamic modeling of the system through the Euler-Lagrange formalism. Then, the theoretical foundations of predictive control, both linear and nonlinear, are presented, highlighting their benefits, historical development, and challenges. Finally, a practical implementation of MPC is conducted on the system, including simulations to test robustness and effectiveness under disturbances and various initial conditions. The results confirm the performance of MPC, especially the nonlinear version (NMPC), in managing complex dynamics.

Keywords: inverted pendulum, predictive control, MPC, NMPC, modeling, stability, nonlinear system.

ملخص

تركز هذه الأطروحة على تثبيت النظام غير الخطي من خلال تقنيات التحكم المتقدمة يتمثل في البندول المقلوب المركب على عربة، باستخدام تقنية التحكم التنبؤي النموذجي .(MPC) تم أولاً نمذجة النظام ديناميكياً، ثم تم استعراض الأسس النظرية لهذا النوع من التحكم، بنسختيه الخطية وغير الخطية، مع التركيز على مميزاته وتاريخه والصعوبات المرتبطة به. أخيرًا، تم تنفيذ تطبيق عملي لطريقة MPC على النظام، وإجراء محاكاة لاختبار فعاليته واستجابته أمام الاضطرابات وحالات البدء المختلفة. أظهرت النتائج أن طريقة التحكم التنبؤي، وخصوصاً الإصدار غير الخطي (NMPC)، توفر أداءً عاليًا في بيئات معقدة.

الكلمات المفتاحية: البندول المقلوب، التحكم التنبؤي، التحكم بالنموذج، MPC، NMPC، النمذجة، الاستقرار، الأنظمة غير الخطية.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été mené au laboratoire D'automatique du département d'électrotechnique de l'université de Saida.

Avant tout, nous remercions الله, Tout-puissant de nous avoir donné le Courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'étude et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé et d'arriver là où nous somme.

Nous adressons nos sincères remerciements et notre profonde Gratitude à :

En tout premier lieu à remercier mon cher encadreur Mr. LABANE Chrif pour la confiance qu'il a accordé en ayant accepté de diriger mon projet et pour son aide, ses conseils précieux et de ses encouragements incessants durant la réalisation de ce travail.

Mon sincères remerciements S'adressent aussi aux membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Je remercie aussi tous les enseignants, sans exception, car c'est grâce à eux que nous sommes arrivés à faire ce travail.

Je tenais à remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

الإهداء

إلى العزيز الذي حملت اسمه فخرًا،
إلى من كلّله الله بالهيبة والوقار،
إلى من حصد الأشواك عن دربي وزرع لي الراحة بدلًا منها،

...إلى أبي
لم يحنِ ظهر أبي ما كان يحمله،
.لكن ليحملني، من أحليّ انحنى
وكنت أحجب عن نفسي مطالبها،
.فكان يكشف عمّا أشتهي الحُجبا
!فشكرًا لكونك أبي

إلى من علّمتني الأخلاق قبل أن أتعلمها،
إلى الجسر الصاعد بي إلى الجنة،
إلى اليد الخفية التي أزالت عن طريقي العقبات،
...ومن ظلت دعواتها تحمل اسمي ليلًا ونهارًا
.أمي، محبوبتي وملهمتي

وإلى من وهبني الله نعمة وجودهم،
...إلى مصدر قوتي، وأرضي الصلبة، وجدار قلبي المتين
إخوتي وأخواتي،

وإلى من إن ضاقت بي الدنيا وسعت بخُطاهم،
وإن سقطت، كانوا أول من رفعوني بكلامهم،
إلى من رافقني بالقلب قبل الدرب،
أصحابي الأحبة

طويت صفحة من التعب وسجلت في تاريخي فخرا لا ينسى. لم أعد أتساءل عن ملامح الوصول فقد رأيتها في عيوني. تلاشت غيوم التعب وابتسم الأفق بعد عَتَمَة الانتظار. ها هي الخُطا التي كانت تتعثر أحيانًا قد وجدت مستقرها في قمة الإنجاز، وبين طيات الطريق تنفست سلامًا وفرحًا وامتنانً

Table des Matières

Table des Matières

1. **Liste des Figures**
2. **Liste des Tableaux**
3. **Liste des Symboles**
4. **Introduction Générale**

Chapitre I : Généralités sur le Pendule Inversé

- I.1 Introduction **4**
- I.2 L'intérêt de l'étude d'un pendule inversé **5**
- I.3 Présentation du pendule inverse **11**
  - I.3.1 Qu'est-ce qu'un pendule ? **11**
  - I.3.2 Description de la maquette **12**
  - I.3.3 Capteurs et infrastructure de commande pour le pendule inversé **14**
  - 1.4 Conclusion **15**

Chapitre II : Modélisation du Pendule Inversé

- II.1 Modélisation du pendule inversé **17**
  - II.1.1 Coordonnées généralisées du système chariot-pendule **18**
- II.2 Equations du Système Pendule et Chariot établies à l'aide du formalisme de Lagrange-Euler **20**
  - II.2.1 Energie cinétique du système en mouvement **21**
  - II.2.2 Energie potentielle du système **23**
- II.3 Conclusion **25**

Chapitre III : Fondements Théoriques de la Commande Prédictive

- III.1 Introduction **27**
- III.2. Généralités **28**
  - III.2.1. Commande Prédictive Linéaire **28**
  - III.2.2. Commande Prédictive Non Linéaire **29**
- III.3 Principe de la Commande Prédictive **30**
- III.4. Éléments d'une commande prédictive **35**
  - III.4.1. Le Modèle **35**
  - III.4.2. Paramètres de réglage **37**
- III.5. Avantages et inconvénients de la commande prédictive **38**
- III.6. Conclusion **39**

Chapitre IV : Application de la Commande Prédictive Linéaire

- IV.1 Objectif **41**
  - IV.1.2 Paramètres de conception du contrôleur prédictif du modèle **43**
- IV.2 Commande prédictive linéaire **45**
- IV.3 Commande prédictive linéaire avec perturbation appliquée **47**
- IV.4 Conclusion **49**

Chapitre V : Commande Non Linéaire par MPC (Swing-Up)

- V.1 MPC Non-Linéaire (NMPC) **51**
  - V.1.1 Introduction au MPC Non-Linéaire (NMPC) **53**
- V.2 Test de suivi avec MPC Non-Linéaire (NMPC) **54**
- V.3 Test de suivi avec perturbation appliquée **57**
- V.4 Conclusion **60**

Conclusion Générale **63**

Liste des Figures

- **Figure I.1 :** Robot marcheur Honda (Page 8)
- **Figure I.2 :** Le Segway (Page 10)
- **Figure II.1 :** Configuration du système chariot-pendule (Page 19)
- **Figure III.1 :** historique de théorie de control. (Page 32)
- **Figure III.2 :** Fonctionnement de MPC. (Page 33)
- **Figure III.4 :** prédiction de comportement futur dans un MPC. (Page 35)
- **Figure IV.1 :** Structure de la commande par MPC (simulink). (Page 44)
- **Figure IV.2 :** Résultats sans perturbations pour la commande MPC linéaire. (Page 45)
- **Figure IV.3 :** Action de contrôle pour le test de régulation. (Page 46)
- **Figure IV.4 :** Test de suivi avec perturbations. (Page 47)
- **Figure IV.5 :** Action de contrôle pour le test de régulation. (Page 48)
- **Figure V.1 :** Structure de la commande par NMPC. (Page 54)
- **Figure V.2 :** Résultats NMPC pour le swing-up (sans perturbations). (Page 56)
- **Figure V.3 :** Action de contrôle pour le test de régulation. (Page 56)
- **Figure V.4 :** Test de suivi, (x) position de chariot avec perturbations. (Page 59)
- **Figure V.5 :** Action de contrôle pour le test de régulation. (Page 59)

Liste des Tableaux

- **Tableau I.1 :** Paramètres mécaniques du système chariot-pendule.
- **Tableau V.1 :** Comparaison entre NMPC et MPC.

Liste des Symboles

Paramètres physiques et géométriques

- **m** : Masse du pendule (kg)
- **M** : Masse du chariot (kg)
- **l** : Demi-longueur du pendule (m)
- **g** : Accélération gravitationnelle (m/s^2)

Variables d'état

- **x** : Position horizontale du chariot (m)
- **x_dot** : Vitesse horizontale du chariot (m/s)
- **x_ddot** : Accélération horizontale du chariot (m/s^2)
- **theta** (**θ**) : Angle de rotation du pendule par rapport à la verticale (rad)
- **theta_dot** : Vitesse angulaire du pendule (rad/s)
- **θ_ddot** : Accélération angulaire du pendule (rad/s^2)

Forces et moments

- **F** : Force de commande appliquée au chariot (N)
- **Tau(τ)** : Couple généré par le pendule (Nm)
- **D** : Coefficient de dissipation ou de frottement viscous (N·s/m)

Paramètres du modèle dynamique

- **I** : Moment d'inertie du pendule autour de son centre de gravité ($kg \cdot m^2$)
- **Ts** : Temps d'échantillonnage (s)
- **P** : Horizon de prédiction (nombre d'échantillons)
- **M** : Horizon de commande (nombre d'actions optimisées)

Paramètres du système de contrôle

- **Yref** : Trajectoire de référence (m ou rad)
- **u(k)** : Commande calculée à l'instant k
- **J** : Critère de performance du système (fonction objectif)
- **Δu** : Variation de la commande entre deux instants (N)
- **epsilon(ϵ)** : Erreur entre la sortie réelle et la référence (m ou rad)
- V_c : La vitesse de centre de gravité du pendule.

Introduction Générale

Le domaine de l'ingénierie de contrôle a connu des avancées significatives au cours des dernières décennies, avec l'émergence de la commande prédictive (MPC) comme une méthode incontournable. Cette thèse s'intéresse à la stabilisation et au contrôle robuste du pendule inversé, un système connu pour son instabilité inhérente et ses dynamiques non linéaires.

Le pendule inversé constitue une plateforme exemplaire pour tester les algorithmes de contrôle grâce à sa complexité dynamique. Il est particulièrement adapté à des applications éducatives et pratiques dans des domaines tels que la robotique et les prothèses médicales. L'objectif de cette étude est d'explorer les stratégies MPC linéaires et non linéaires, en mettant l'accent sur leur implémentation, leur simulation et leur évaluation en termes de performances.

Cette thèse est structurée en cinq chapitres :

Introduction au pendule inversé : Une présentation de sa modélisation et de son importance en ingénierie.

Modélisation dynamique : Développement des équations du système à l'aide de l'approche d'Euler-Lagrange.

Fondements théoriques de la MPC : Analyse des cadres de commande prédictive linéaire et non linéaire.

Application de la MPC linéaire : Stabilisation du pendule inversé en présence de perturbations.

Application de la MPC non linéaire : Traitement de scénarios complexes, tels que la manœuvre de redressement (swing-up).

En combinant des perspectives théoriques à des simulation, ce travail contribue à une meilleure compréhension et application de la MPC pour stabiliser des systèmes non linéaires sous contraintes.

I.
Généralités sur le pendule inversé

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire un modèle non linéaire d'un système emblématique en automatique : le pendule inversé. Ce système, largement étudié dans les applications de commande, se distingue par son instabilité intrinsèque, en particulier au niveau de l'angle d'inclinaison. Il représente une plateforme d'essai idéale pour analyser et résoudre des problèmes complexes de contrôle et de stabilité. En effet, grâce à sa dynamique riche et ses défis associés, le pendule inversé est couramment utilisé comme cas d'étude pour tester et valider différentes stratégies de commande. Les modèles et méthodes développés ici serviront de base pour les analyses approfondies et les tests des commandes synthétisées dans les chapitres ultérieurs[1].

Ensuite, nous nous concentrerons sur le développement d'un modèle dynamique précis du système. Ce modèle sera présenté sous forme d'équations différentielles obtenues à partir du formalisme d'Euler-Lagrange.Cette méthode constitue une approche systématique et rigoureuse permettant de modéliser les systèmes mécaniques complexes en tenant compte à la fois de leur énergie cinétique et de leur énergie potentielle. Le formalisme d'Euler-Lagrange présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre tout en offrant une description complète et cohérente de la dynamique du système[2].

En adoptant cette approche, nous serons en mesure de formuler des équations différentielles qui capturent les caractéristiques clés du pendule inversé, notamment son comportement non linéaire, son instabilité naturelle et ses interactions dynamiques. Ces équations constitueront une base essentielle pour la conception des stratégies de commande abordées ultérieurement.[3]

Ce chapitre vise donc à poser les fondations théoriques nécessaires pour comprendre le fonctionnement du pendule inversé, tout en préparant le terrain pour les travaux pratiques et les simulations qui suivront. L'objectif est d'établir une compréhension solide des dynamiques du système afin de pouvoir développer et évaluer des approches innovantes de commande dans les prochaines étapes de notre étude.

I.2 L'intérêt de l'étude d'un pendule inversé

Les intérêts en ingénierie de l'étude du pendule inversé sont divers et remarquables voici deux exemples qui illustrent bien son utilité :

Le modèle du pendule inversé a trouvé des **applications en médecine**, en particulier dans les domaines nécessitant l'équilibre, la stabilité et le contrôle dynamique. Voici quelques exemples :

1. Prothèses et Orthèses

- Prothèses de membres inférieurs : Le modèle du pendule inversé est souvent utilisé pour étudier et améliorer la démarche des personnes équipées de prothèses. Pendant la marche, le corps humain se comporte comme un pendule inversé où le centre de masse oscille autour de la jambe d'appui. Ce concept aide les ingénieurs à concevoir des prothèses qui imitent les schémas naturels de marche et assurent la stabilité.
- Exosquelettes pour rééducation : Les exosquelettes robotiques utilisés pour les patients ayant des troubles de mobilité exploitent des stratégies de contrôle basées sur le pendule inversé pour assister l'équilibre et la locomotion.

2. Contrôle de la posture et de l'équilibre

- Dispositifs d'entraînement à l'équilibre : Des dispositifs reproduisant la dynamique du pendule inversé sont utilisés en kinésithérapie pour entraîner les patients à maintenir leur équilibre. Par exemple, les planches d'équilibre ou les plateformes inclinables aident les patients atteints de troubles neurologiques comme la maladie de Parkinson à retrouver leur stabilité.
- Recherche sur la prévention des chutes : Le modèle du pendule inversé est appliqué pour étudier les mécanismes d'équilibre chez les personnes âgées afin de concevoir des interventions visant à réduire les risques de chutes.

3. Chirurgie robotique et télémédecine

- Robots d'assistance : Les robots chirurgicaux utilisant des mécanismes d'équilibrage s'appuient sur les principes du pendule inversé pour des mouvements précis. Cela garantit que le bras robotique reste stable même lors de procédures complexes.
- Plates-formes médicales dynamiques : Les plates-formes robotiques mobiles utilisées en télémédecine pour transporter des fournitures médicales ou interagir avec des patients reposent sur le contrôle du pendule inversé pour maintenir une stabilité verticale en mouvement.

4. Biomécanique et analyse du mouvement humain

- Rééducation spinale : Le torse humain peut être modélisé comme un pendule inversé lors de l'analyse des mouvements ou de la conception de dispositifs pour la rééducation après une blessure à la colonne vertébrale. Les techniques de contrôle

issues du modèle du pendule inversé permettent de simuler et de soutenir les ajustements posturaux naturels nécessaires pendant le mouvement.
- Dispositifs d'assistance pour les troubles neuromusculaires : Les dispositifs destinés à soutenir les patients atteints de troubles neuromusculaires, comme la sclérose en plaques ou les survivants d'accidents vasculaires cérébraux, utilisent les modèles de pendule inversé pour améliorer la stabilité et la mobilité.

5. Analyse du système vestibulaire

- Troubles de l'équilibre : La recherche sur le système vestibulaire, qui régule l'équilibre humain, utilise souvent la dynamique du pendule inversé pour modéliser la manière dont le corps maintient son équilibre. Cela aide à diagnostiquer et à traiter les troubles de l'équilibre causés par des problèmes de l'oreille interne.

6. Robots avancés de rééducation

- Robots de marche dynamique : Les robots conçus pour aider les patients à réapprendre à marcher après une blessure ou un accident vasculaire cérébral appliquent les dynamiques du pendule inversé. Ces systèmes aident à reproduire les interactions complexes entre l'équilibre, le mouvement et l'alignement corporel.

En s'appuyant sur la dynamique du pendule inversé, la médecine continue d'innover dans les domaines de la rééducation, des prothèses et des systèmes de soutien aux patients, offrant des solutions qui améliorent la qualité de vie et la mobilité.

En robotique :

Dans le domaine de la robotique, le concept de pendule inversé est souvent utilisé pour modéliser et analyser le comportement des robots, en particulier ceux qui nécessitent un équilibre dynamique pour fonctionner correctement. Un robot peut être conceptualisé comme un pendule inversé, où le maintien de l'équilibre correspond à la stabilisation de sa position verticale tout en se déplaçant et en résistant aux perturbations externes. Ce principe fondamental guide la conception et le contrôle de nombreux systèmes robotiques avancés.

Pour maintenir un robot en équilibre, il est nécessaire de stabiliser le pendule inversé associé à sa configuration mécanique. Cela implique l'utilisation de stratégies de contrôle sophistiquées capables de compenser les déséquilibres causés par les mouvements du robot ou par des perturbations extérieures, telles que des variations de terrain, des forces appliquées ou des changements rapides de direction. Ce défi est particulièrement pertinent dans les robots dynamiques et autonomes, où la stabilité est un élément clé pour garantir leur efficacité et leur sécurité.

Exemples de robots conçus sur ce principe :

1. **Le robot marcheur**

   Ce type de robot est souvent modélisé comme une combinaison de deux doubles pendules inversés en série. Dans cette configuration, chaque jambe du robot peut être vue comme un pendule inversé, relié à un corps central par des articulations. Les deux pendules, représentant les jambes, sont couplés par une tige centrale dotée de deux articulations, simulant les hanches. Cette conception permet au robot de se déplacer de manière fluide tout en maintenant son équilibre, même pendant les phases critiques de marche, telles que le balancement des jambes ou le passage d'un appui à l'autre.

2. **Les robots humanoïdes**

   Les robots humanoïdes comme ASIMO de Honda ou Atlas de Boston Dynamics utilisent des principes similaires. Leur conception repose sur la modélisation de chaque segment du corps, y compris les jambes, le tronc et les bras, comme des pendules inversés connectés. Ces robots doivent gérer de multiples degrés de liberté tout en conservant une stabilité dynamique, que ce soit en position stationnaire ou en mouvement, comme lors de la montée d'escaliers ou de la réalisation de tâches complexes.

3. **Les robots mobiles auto-équilibrants**

   Les robots sur deux roues, comme le Segway ou les robots de service autonomes, exploitent directement le modèle du pendule inversé. Leur équilibre est maintenu en ajustant constamment la position de leurs roues en réponse aux changements d'inclinaison ou aux forces externes.

4. **Les robots bipèdes dynamiques**

   Ces robots simulent la marche humaine en s'appuyant sur des principes de pendules inversés pour modéliser le comportement de chaque jambe et optimiser l'équilibre pendant la locomotion. Ils sont utilisés dans des applications de recherche, de logistique ou de secours en terrain accidenté.

En conclusion, le modèle du pendule inversé est un pilier conceptuel en robotique, offrant un cadre pour la conception et le contrôle de robots capables de maintenir leur équilibre tout en accomplissant des tâches variées et en s'adaptant à des environnements

changeants. Cette approche ouvre la voie à des avancées significatives dans la création de systèmes robotiques toujours plus stables, dynamiques et performants.



Figure I.1 : Robot marcheur Honda.

Chaise sur deux roues / Le Segway :

Les systèmes tels que les chaises motorisées sur deux roues ou les Segways constituent des exemples emblématiques d'applications pratiques du modèle de pendule inversé en robotique mobile. Ces dispositifs sont conçus pour assurer un équilibre dynamique en s'appuyant sur des principes de contrôle avancés. Leur structure se compose d'un pendule inversé simple, représenté par une seule tige verticale qui correspond soit au corps de l'utilisateur, soit à la structure principale de l'appareil. Ce pendule est monté sur une base mobile équipée de deux roues motorisées, capables de se déplacer dans les directions avant et arrière.

Le principe de fonctionnement repose sur un ajustement constant de la position des roues pour compenser les déséquilibres du pendule et maintenir la stabilité de l'ensemble. Dès que l'utilisateur modifie son inclinaison, en se penchant vers l'avant ou l'arrière, le système détecte immédiatement ce changement grâce à des capteurs de haute précision, tels que des accéléromètres et des gyroscopes. Ces capteurs mesurent en temps réel les variations d'angle et de vitesse angulaire, fournissant des informations cruciales à l'algorithme de commande.

L'algorithme, généralement basé sur des techniques de contrôle en boucle fermée, calcule alors la réponse appropriée et transmet les instructions nécessaires aux moteurs. Ceux-ci ajustent rapidement le déplacement des roues dans la direction requise pour compenser la variation d'inclinaison, rétablir l'équilibre et éviter une chute. Ce processus se déroule en continu, ce qui permet au système de s'adapter rapidement à des perturbations, qu'elles soient causées par les mouvements de l'utilisateur ou par des irrégularités dans le terrain.

Ces dispositifs illustrent de manière concrète les défis techniques liés au contrôle en temps réel, notamment la rapidité et la précision requises pour traiter les informations issues des capteurs, calculer les corrections, et les appliquer en quelques millisecondes. De plus, ils mettent en évidence l'importance de la gestion de la stabilité dans des environnements dynamiques où les conditions de fonctionnement peuvent varier rapidement.

En termes d'applications, ces systèmes ont ouvert la voie à une multitude d'innovations en robotique mobile et en ingénierie biomédicale. Les chaises motorisées sur deux roues offrent une mobilité accrue aux personnes à mobilité réduite, tandis que les Segways ont transformé les modes de déplacement urbain en offrant une solution écologique, intuitive et pratique. Ces technologies illustrent parfaitement l'utilité des concepts de pendule inversé dans le développement de systèmes robustes, adaptatifs et capables de répondre à des besoins variés dans le monde réel.



Figure I.2 : Le Segway.

I.3 Présentation du pendule inversé

I.3.1 Qu'est-ce qu'un pendule ?

L'objectif principal de ce projet est de souligner l'importance de la conception détaillée et de l'analyse approfondie d'un pendule inversé, un système emblématique dans le domaine de la dynamique et du contrôle. Ce dispositif, caractérisé par son instabilité inhérente, est reconnu comme une plateforme essentielle en ingénierie de contrôle. Il offre un cadre expérimental idéal pour tester et comparer une variété de techniques, allant des méthodes classiques comme les régulateurs PID jusqu'aux approches modernes telles que le contrôle adaptatif ou le contrôle prédictif basé sur des modèles.

Dans le cadre de ce travail, le pendule sera modélisé en configuration planaire 2-R, où les deux degrés de liberté incluent la rotation du pendule et le déplacement linéaire de la base. Ce choix de modèle permet de simplifier les analyses tout en conservant les éléments critiques nécessaires pour étudier les aspects complexes de la dynamique. Le facteur clé différenciant de cette modélisation réside dans la plage de déplacement spécifique qui influence directement les propriétés dynamiques et la conception des stratégies de contrôle.

En tant que système pédagogique, le pendule inversé offre une opportunité unique pour explorer et examiner plusieurs problématiques fondamentales en ingénierie. Parmi celles-ci figurent l'étude approfondie de la stabilité, la gestion des non-linéarités, et l'analyse des interactions entre différents degrés de liberté. En outre, il s'agit d'un outil de choix pour développer et tester des approches de contrôle robustes, adaptées aux perturbations externes et aux variations des paramètres du système.

En conclusion, ce projet vise non seulement à concevoir et modéliser un système complexe, mais également à offrir un environnement d'apprentissage pratique pour l'ingénierie de contrôle. Il met en lumière les défis et les opportunités liés au contrôle des systèmes instables, tout en proposant des solutions innovantes et adaptées aux besoins des applications modernes en robotique, en mécatronique, et dans d'autres domaines connexes.

I.3.2 Description de la maquette

Le mécanisme étudié est composé de deux éléments principaux : un chariot qui se déplace de manière rectiligne sur une piste et un pendule attaché au chariot. Ce dispositif illustre un système dynamique couplé où le mouvement de l'un influence directement celui de l'autre. La théorie fondamentale qui sous-tend son fonctionnement est simple : lorsque le pendule s'incline vers la droite, le chariot doit se déplacer dans la même direction afin de maintenir l'équilibre du système. Ce principe est également applicable lorsque le pendule s'incline vers la gauche. Cependant, ce qui paraît simple en théorie devient un véritable défi en pratique, car cela implique de contrôler précisément l'intensité et la direction de la force appliquée au chariot en fonction de l'angle et de la vitesse du pendule par rapport à l'axe vertical.

Le système chariot-pendule est un exemple classique d'un système dynamique non linéaire, multivariable et instable. Ces caractéristiques rendent sa modélisation et son contrôle particulièrement complexes. Il est également sous-actionné, ce qui signifie qu'il possède moins d'actionneurs que de degrés de liberté à contrôler. Cela ajoute une difficulté supplémentaire, car toutes les variables du système ne peuvent pas être directement commandées.

En outre, plusieurs phénomènes indésirables compliquent davantage le contrôle du système. Parmi ces phénomènes, on peut citer de fortes vibrations qui affectent la stabilité du système, des modes élastiques entre l'axe de rotation et la tige du pendule, et des effets de rétroaction indésirables dus aux vitesses relatives des composants et à la ceinture de transmission. Par ailleurs, les phénomènes de saturation des entrées, causés par des limites physiques dans les actionneurs ou les moteurs, réduisent les marges de manœuvre pour stabiliser le système dans des conditions extrêmes.

Le chariot-pendule, en tant que système mécanique, possède deux degrés de liberté principaux, représentés par deux coordonnées généralisées : le déplacement horizontal du chariot et l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à l'axe vertical. Ces deux variables permettent de décrire complètement l'état dynamique du système et sont cruciales pour le développement de stratégies de contrôle efficaces. En définitive, l'analyse et la gestion de ce mécanisme complexe offrent une opportunité d'étudier des problèmes fondamentaux liés à la stabilité, aux non-linéarités et aux contraintes physiques dans le domaine de l'ingénierie des systèmes dynamiques.

x pour le déplacement horizontal du chariot, θ pour la rotation du pendule. Les paramètres mécaniques ou physiques du système chariot-pendule sont définis avec leur notion dans le tableau (I.1).

Symbole	Désignation
m	La masse du pendule
M	La masse du chariot
l	longueur du pendule

Tableau I.1 : Les paramètres de l'ensemble pendule-chariot.

I.3.3 Capteurs et infrastructure de commande pour le pendule inversé

Le système de pendule inversé repose sur une infrastructure de capteurs et de dispositifs de traitement qui permettent de suivre et de contrôler l'état du système en temps réel avec une grande précision. Deux paramètres clés sont mesurés en continu pour assurer la stabilité et la performance :

1. **La position du chariot**

   Ce paramètre est mesuré à l'aide de capteurs de position linéaire, tels que des encodeurs ou des potentiomètres. Ces dispositifs fournissent des données précises sur le déplacement horizontal du chariot, qui sont essentielles pour déterminer les actions correctives nécessaires à la stabilisation du système.
2. **L'angle du pendule**

   Cet angle est mesuré à l'aide de capteurs de position angulaire comme des gyroscopes ou des accéléromètres. Ces capteurs permettent de détecter les inclinaisons et les oscillations du pendule avec une grande sensibilité, fournissant ainsi les informations nécessaires pour prédire son comportement dynamique.

Une fois ces mesures collectées, elles sont traitées numériquement pour être exploitées par une stratégie de commande avancée, telle que le contrôle prédictif basé sur modèle (MPC). Ce traitement implique souvent l'utilisation de filtres numériques ou analogiques pour réduire les bruits de mesure et lisser les signaux. Ces étapes garantissent que les données envoyées à l'algorithme de commande sont fiables et adaptées à des calculs précis.
La force de commande, calculée par l'algorithme MPC en fonction des états mesurés et des prédictions, est ensuite transmise à l'actionneur responsable du mouvement du chariot. Cet actionnement peut être assuré par divers types de systèmes, tels que des moteurs électriques ou des dispositifs électromécaniques. Bien que le matériel utilisé puisse varier selon les applications, l'objectif principal, dans le cadre de ce projet, est de se concentrer sur la conception et l'évaluation du régulateur, ainsi que sur la simulation du comportement global du système.
Enfin, pour garantir le bon fonctionnement du système et prévenir les risques de dépassements mécaniques, des mesures de sécurité supplémentaires peuvent être intégrées. Cela peut inclure :

- **Des limites de course physiques** : des butées mécaniques empêchant le chariot de dépasser une certaine amplitude.
- **Des contraintes explicites dans l'algorithme MPC** : celles-ci permettent de définir des limites maximales pour les déplacements et les forces afin de préserver l'intégrité des composants.

Ainsi, la combinaison des capteurs, de l'algorithme de commande avancé et des dispositifs de sécurité assure un contrôle précis et robuste du système de pendule inversé, même dans des conditions opérationnelles complexes ou perturbées.

I.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, une présentation générale du pendule inversé a été réalisée, mettant en avant son importance comme plateforme d'étude en ingénierie de contrôle. Le pendule inversé, en tant que système dynamique instable et non linéaire, constitue un excellent outil pour tester et valider différentes stratégies de commande.

L'analyse a également permis de souligner ses nombreuses applications dans des domaines variés, notamment :

En robotique, où il est utilisé pour modéliser et contrôler des systèmes tels que les robots marcheurs ou les dispositifs de mobilité personnelle (ex. Segway).

En médecine, pour simuler et étudier les mécanismes de stabilité du corps humain, comme dans le cas des prothèses articulaires.

Ensuite, une modélisation dynamique du système chariot-pendule a été amorcée. Cette modélisation est essentielle pour comprendre les interactions complexes entre les différents composants du système et préparer les bases pour la conception des stratégies de commande.

Ainsi, ce chapitre a posé les fondations théoriques nécessaires pour les travaux ultérieurs, en insistant sur :

Les caractéristiques uniques du pendule inversé, qui en font un système de référence pour les défis de stabilisation.

L'importance de sa modélisation pour la synthèse des commandes avancées, telles que la commande prédictive (MPC).

Dans les chapitres suivants, une modélisation mathématique détaillée sera développée, suivie de l'application des techniques de commande pour résoudre les problématiques spécifiques à ce système complexe.

II.
Modélisation du pendule inversé

II.1 Modélisation du pendule inversé

Le pendule inversé est un système emblématique en ingénierie de commande, connu pour sa nature multi-variable, ses dynamiques fortement non linéaires, et son instabilité inhérente. De plus, il se caractérise par des constantes de temps très rapides, rendant son contrôle particulièrement exigeant et complexe. En raison de ces propriétés, le pendule inversé est largement utilisé comme banc d'essai pour évaluer et perfectionner diverses stratégies de commande, notamment celles destinées à des systèmes hautement dynamiques et instables.
Pour stabiliser un tel système, une première étape essentielle consiste à développer un modèle mathématique rigoureux qui représente fidèlement ses comportements dynamiques. Ce modèle constitue la base pour analyser le système, concevoir des lois de commande adaptées et effectuer des simulations précises. La phase de modélisation est donc un prérequis incontournable, permettant non seulement de comprendre en profondeur les interactions internes du système, mais aussi de prédire sa réponse sous différentes conditions.
Différentes approches de modélisation existent dans la littérature. Parmi les plus couramment utilisées, on trouve :

1. **La méthode basée sur la physique newtonienne** : Cette approche repose sur les lois fondamentales de la mécanique classique, notamment la deuxième loi de Newton, pour établir les équations de mouvement. Elle est intuitive et bien adaptée à des systèmes simples mais peut devenir complexe pour les systèmes à degrés de liberté multiples.
2. **Le formalisme de Lagrange-Euler** : Cette méthode, plus systématique, s'appuie sur les principes énergétiques du système, notamment l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Elle permet de traiter de manière élégante les systèmes multi-variables avec des contraintes, en conduisant à des équations scalaires simplifiées.

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'utiliser le formalisme de Lagrange-Euler[6-7]. Ce choix repose sur plusieurs avantages de cette méthode. En effet, elle est particulièrement bien adaptée à la modélisation de systèmes complexes comme le pendule inversé, car elle intègre naturellement les contraintes et les interactions internes. De plus, elle offre une perspective énergétique qui facilite l'analyse qualitative et quantitative du comportement du système.
Cette approche nous a permis de développer un modèle mathématique précis et cohérent, servant de fondement aux études de simulation et aux étapes ultérieures de conception des stratégies de commande. Les résultats obtenus démontrent la pertinence de ce choix méthodologique, contribuant ainsi à une meilleure compréhension et maîtrise du problème de stabilisation du pendule inversé.

II.1.1 Coordonnées généralisées du système chariot-pendule

L'ensemble du système chariot-pendule constitue un exemple emblématique d'un système mécanique à deux degrés de liberté. Ces deux degrés de liberté se traduisent par des mouvements indépendants qui peuvent être décrits par des variables appelées coordonnées généralisées. Dans ce cas précis, ces coordonnées sont : x(t), représentant le déplacement horizontal du chariot, et theta(t), correspondant à l'angle de rotation du pendule autour de son axe de pivotement.
Le déplacement x(t) est exprimé en mètres, avec une convention où la direction positive est orientée vers la droite, ce qui permet de quantifier précisément le mouvement linéaire du chariot sur son rail ou surface de support. L'angle theta(t), quant à lui, est mesuré en radians, avec une direction positive correspondant au sens des aiguilles d'une montre. Cette convention angulaire est essentielle pour définir le sens de rotation du pendule de manière uniforme et cohérente.

La configuration du système et les choix des coordonnées généralisées sont particulièrement importants, car ils influencent directement la modélisation et l'analyse dynamique. Le chariot se déplace sur un axe horizontal tandis que le pendule, attaché au chariot, oscille ou effectue une rotation autour de son point d'attache. Cette interaction entre le mouvement linéaire et le mouvement angulaire reflète la complexité dynamique du système, qui est souvent étudié pour ses applications en contrôle et stabilisation.
En outre, la compréhension précise des conventions de direction permet d'interpréter correctement les résultats issus des équations de mouvement. Par exemple, une valeur positive de x(t) indique un déplacement du chariot vers la droite, tandis qu'une valeur positive de theta(t) traduit une rotation du pendule dans le sens horaire. Ces détails sont fondamentaux dans le cadre des analyses expérimentales et numériques.

Ce système, comme représenté dans la figure II.1, est un modèle de référence en mécanique et en ingénierie des systèmes de contrôle. Il est largement utilisé pour étudier l'analyse des interactions entre différents degrés de liberté.des concepts tels que lastabilité,lecontrôle des systèmes non linéaires et l'analyse des interactions entre différents degrés de liberté.

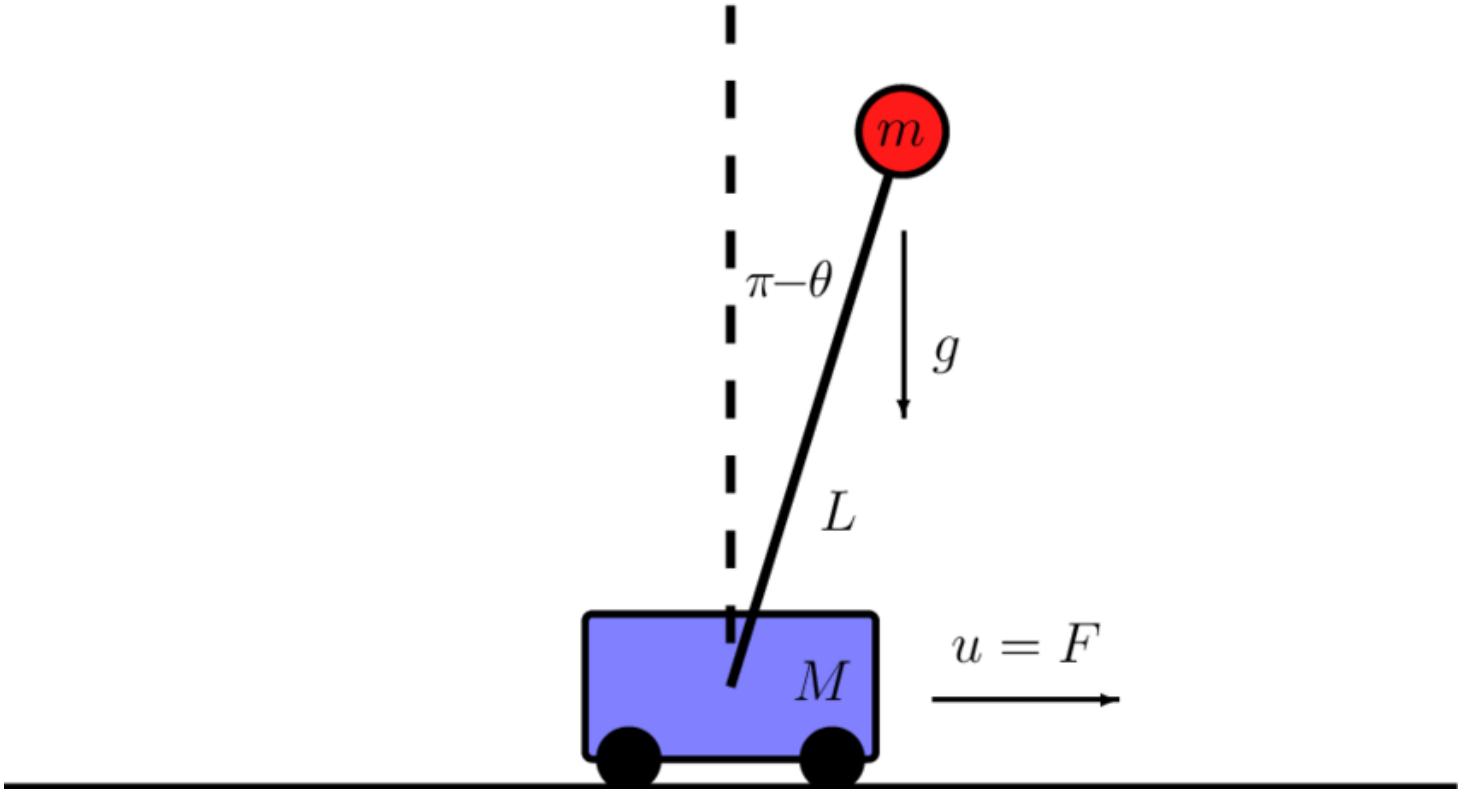

Figure II.1 : Configuration de l'ensemble du chariot-pendule.

Les paramètres de l'ensemble chariot-pendule sont :

- m =0.5 Kg : Représente la masse du pendule.
- M =1 Kg : Masse du chariot.
- x(t) : Position du chariot (m).
- l =0.5 m : Demi-longueur du pendule.
- (theta): Angle de rotation du pendule (rad),
- F(t): Force exercée sur le chariot (N).

II.2 Equations du Système Pendule et Chariot établies à l'aide du formalisme de Lagrange-Euler

Le Lagrangien, en mécanique analytique, constitue une fonction fondamentale permettant de décrire le comportement dynamique d'un système. Il est défini comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Cette approche, développée à partir des principes de la mécanique classique, offre une méthodologie élégante et puissante pour formuler les équations du mouvement d'un système complexe, qu'il soit linéaire ou non linéaire.

L'un des principaux avantages de ce formalisme réside dans sa capacité à éliminer directement les efforts d'interaction internes, comme les forces de liaison ou les contraintes qui n'accomplissent pas de travail virtuel. Cela simplifie grandement l'analyse et la modélisation, car seules les variables dynamiques essentielles du système sont prises en compte. En d'autres termes, l'utilisation du Lagrangien permet de se concentrer exclusivement sur les degrés de liberté du système, en évitant les calculs fastidieux associés aux forces internes, il s'exprime par [5-7]:

$$L = E_c - E_p \qquad \text{(II.1)}$$

II.2.1 Energie cinétique du système en mouvement

Le système en mouvement se compose de deux éléments principaux qui interagissent de manière dynamique. Tout d'abord, le chariot, qui est conçu pour se déplacer de manière linéaire le long de rails, représente la base du système. Ce mouvement rectiligne est généralement limité à une seule dimension, facilitant ainsi l'étude et le contrôle de son déplacement. Ensuite, le pendule, fixé au chariot, effectue un mouvement oscillatoire autour de son axe de rotation. Ce balancement peut être décrit comme une rotation qui varie en fonction du déplacement du chariot et des forces externes appliquées au système.

Cette configuration illustre une interaction complexe entre un mouvement linéaire et un mouvement angulaire. Le chariot et le pendule sont reliés de manière à ce que le mouvement de l'un influence directement celui de l'autre. Par exemple, une accélération soudaine du chariot peut entraîner une augmentation de l'amplitude ou de la fréquence des oscillations du pendule. De plus, la stabilité de ce système repose sur la gestion précise de ces deux types de mouvements, rendant ce dispositif particulièrement intéressant pour des études en contrôle et stabilisation.

Ainsi, le système chariot-pendule constitue un exemple emblématique de dynamique couplée, souvent utilisé pour explorer les principes fondamentaux de la mécanique et du contrôle, tout en offrant un modèle riche en applications pratiques et éducatives. L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par l'équation :

$$E_{CM} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 \tag{II.2}$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par relation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \mathrm{J}\dot{\theta}^2 \tag{II.3}$$

Avec :

- V_c : La vitesse de centre de gravité du pendule.
- $\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule.
- J : le moment d'inertie du pendule.

La position du centre de gravité du pendule, notée r_{cm} à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$r_{cm} = (\, x + l sin\, \theta\,)\vec{\imath} + l cos\, \theta \vec{J} \tag{II.4}$$

i,j : étant les vecteurs unitaires du repère x, y.

La vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$V_c = \frac{dr_{cm}}{dt} = \left(\, \dot{x} + \, \dot{x}\, l \cos\theta\dot{\theta}\right)\vec{\imath} - (l\, sin\, \theta\dot{\theta})\vec{J} \tag{II.5}$$

En substituant les équations (II.1) et (I.5) dans l'équation (I.3), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,l\cos\theta\dot{\theta} + l^2cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2sin^2\theta\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{J}\dot{\theta}^2 \quad \text{(II.6)}$$

Qui s'écrit après simplification du terme ($\sin^2+\cos^2=1$) on a :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,l\cos\theta\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{J}\dot{\theta}^2 \quad \text{(II.7)}$$

Finalement, l'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot-pendule est exprimée par :

$$E_c = E_{CM} + E_{cm} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,l\cos\theta\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{J}\dot{\theta}^2 \quad \text{(II.8)}$$

II.2.2 Energie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle. L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = m\ g\ l \cos\theta \tag{II.9}$$

Une fois que les expressions de l'énergie cinétique E_C de l'ensemble chariot-pendule (Equation II.8) et l'énergie potentiel du système E_P (Equation II.9) sont établies, on utilise la relation générale d'Euler- Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule.En substituant les équations (II.8) et (II.9) dans l'équation (II.1) on trouve :

$$L = \frac{1}{2}\ M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\ \dot{x}^2 + 2\ \dot{x}\ l\cos\theta\dot{\theta} + \ l^2\dot{\theta}^2\ \right) + \frac{1}{2}\mathrm{J}\dot{\theta}^2 - (m\ g\ l\cos\theta) \tag{II.10}$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varepsilon}}\right) - \frac{dL}{d\varepsilon} + \frac{dD}{d\dot{\varepsilon}} = F \tag{II.11}$$

Où :

ε : désigne les degrés de liberté. Dans le cas du pendule, ces deux degrés de liberté sont la position du chariot x(t) et l'angle de rotation du pendule ɵ(t).

D : désigne l'énergie dissipée par frottement ; F: la force généralisée.

On définit donc l'équation de Lagrange pour le pendule inversé comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varepsilon}}\right) - \frac{dL}{d\varepsilon} = F \tag{II.12}$$

- pour le degré de liberté ε(t)=x(t), on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varepsilon}}\right) - \frac{dL}{d\varepsilon} = F - b\dot{x} \tag{II.13}$$

Où F : représente la force exercée sur le chariot. La dérivée partielle du lagrangien suivant x et t s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + m\dot{x} + \ m\ l\cos\theta\dot{\theta}\ \right) - 0 = F - b\dot{x} \tag{II.14}$$

On obtient alors, la première équation de Lagrange est :

$$(M+m)\ddot{x} + \ m\ l\cos\theta\ddot{\theta} - m\ l\ sin\ \ddot{\theta}^2 = F - b\dot{x} \tag{II.15}$$

- pour le degré de liberté ε(t)= theta(t), on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varepsilon}}\right) - \frac{dL}{d\varepsilon} = \ -d\dot{\theta} \tag{II.16}$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant θ et $\dot{\theta}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m\,l\,\dot{x}\cos\theta + ml^2\theta + \mathrm{J}\dot{\theta}) - \left(-m\,l\,\dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} + m\,g\,l\,\sin\theta\right) = -d\dot{\theta} \qquad \text{(II.17)}$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + \mathrm{J})\ddot{\theta} + m\,l\,\ddot{x}\cos\theta - m\,l\,\dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} + m\,l\,\dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,\sin\theta = -d\dot{\theta} \qquad \text{(II.18)}$$

Le modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule (Equation I.17 et I.18) est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + m\,l\cos\theta\ddot{\theta} - m\,l\,sin\theta\,\dot{\theta}^2 = F \\ m\,l\,\ddot{x}\cos\theta + (ml^2 + \mathrm{J})\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - m\,g\,l\,\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.19)}$$

Le système d'équations (I.19) illustre la relation étroite entre l'accélération du chariot et l'accélération angulaire du pendule, soulignant leur interdépendance dynamique. Ainsi,en l'absence de force extérieure (F = 0), si le pendule est déplacé de sa position d'équilibre, il sera soumis uniquement à sa propre inertie, ce qui entraînera des oscillations autour de cette position. Ces oscillations, transmises au chariot auquel le pendule est fixé, provoqueront un mouvement de ce dernier. Ce phénomène met en évidence l'interaction continue entre le pendule et le chariot, où chaque composante influence le comportement global du système.

Soit le vecteur d'état :

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{u = F}$$

Matrices d'espace d'état :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{D = 0\ .}$$

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une analyse détaillée du système pendule inversé sur chariot, en mettant en évidence ses caractéristiques dynamiques complexes et instables.

La modélisation a été réalisée selon le formalisme de Lagrange-Euler, permettant d'obtenir un système d'équations différentielles représentant fidèlement le comportement physique du système. Cette étape est fondamentale car elle constitue la base sur laquelle repose la conception de toute stratégie de commande.

Le pendule inversé s'avère ainsi être un excellent cas d'étude pour tester des approches avancées de régulation, en raison de ses nombreuses particularités : non-linéarité, instabilité, et interaction multivariable entre les composants.

III.

Fondements Théoriques de la Commande Prédictive

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une stratégie de régulation appelée Modèle Prédictif Adaptatif (MPC, pour *Model Predictive Control*). Cette méthode repose sur l'utilisation d'un modèle du système pour anticiper son comportement futur, puis déterminer en temps réel les actions optimales à appliquer afin d'atteindre les objectifs de stabilisation. Contrairement aux approches classiques, le MPC tient compte à la fois des contraintes physiques du système et des perturbations extérieures. En version adaptative, il est même capable d'ajuster son modèle en fonction des variations des paramètres du système au cours du temps.

Grâce à cette approche, il devient possible de maintenir un pendule inversé en position verticale, même en présence de modifications telles que des changements de masse, de longueur ou face à des perturbations imprévues. Ce chapitre présente donc non seulement la théorie du MPC adaptatif**,** mais également son application concrète à un système emblématique : *le pendule inversé monté sur un chariot* [13]*.*

Ce système est fréquemment utilisé dans le domaine de l'automatique en raison de sa dynamique complexe. Naturellement instable, le pendule chute en l'absence de contrôle. De plus, son comportement est non linéaire, c'est-à-dire que sa réponse ne suit pas une logique simple ni proportionnelle aux commandes. Ces caractéristiques en font un excellent cas d'étude pour tester et comparer différentes méthodes de commande.

III.2. Généralités

III.2.1. Commande Prédictive Linéaire

L'idée de la commande prédictive plonge ses racines dans les travaux de contrôle optimal de la fin des années 1960. Dès 1962, Zadeh et Whalen établissent un lien clé entre contrôle optimal et programmation linéaire , une avancée reprise dans . En 1963, Propoi propose une approche révolutionnaire : l'horizon glissant, concept central des algorithmes de commande prédictive (MPC) . Cette méthode, baptisée plus tard *Open-Loop Optimal Feedback*, préfigure la logique moderne du MPC : mesurer l'état actuel du système, calculer une trajectoire optimale en temps réel, appliquer une partie de cette solution, puis répéter le processus à chaque pas. Lee et Markus formalisent cette idée dès 1967, décrivant un algorithme proche du MPC actuel.

Mais c'est dans les années 1970 que la commande prédictive passe de la théorie à l'industrie, grâce à Richalet et son équipe. Leur logiciel IDCOM (Identification-Commande) marque un tournant, ouvrant la voie à une explosion de variantes de MPC. Parmi les plus influentes [11-12]:

- **MPHC** (Model Predictive Heuristic Control),renommée MAC (Model Algorithmic Control), optimise les systèmes multivariables en imposant des trajectoires de référence et en minimisant l'erreur de variance sur un horizon long.
- **DMC** (Dynamic Matrix Control), développé par Shell, privilégie l'incrément de commande plutôt que la commande elle-même pour des systèmes linéaires sans contraintes, résolu via les moindres carrés.
- **EHAC** (Extended Horizon Adaptive Control), dédiée aux systèmes monovariables, utilise des modèles entrée/sortie et une équation diophantienne pour coller à la consigne malgré les retards purs.
- **EPSAC** (Extended Prediction Self-Adaptive Control) linéarise les systèmes non linéaires, remplaçant l'équation diophantienne par un prédicteur sous-optimal.
- **GPC** (Generalized Predictive Control) , la plus populaire, s'appuie sur un modèle CARIMA et un horizon glissant pour gérer systèmes instables, à phase non minimale ou avec retards .
- **PFC** (Predictive Functional Control) , simple et intuitif pour les systèmes SISO rapides, permet un réglage direct de paramètres comme la constante de temps.
- **CRHPC** (Constrained Receding Horizon Predictive Control) intègre des contraintes terminales sur la sortie au-delà de l'horizon de prédiction.
- **MPC** formulée dans l'espace d'état, exploite les représentations d'état pour analyser stabilité et robustesse.

Aujourd'hui, ces méthodes convergent sous l'appellation générique MPC, soulignant le rôle central du modèle. D'autres déclinaisons ont émergé, trouvant des applications dans l'aérospatial, l'industrie papetière ou la pétrochimie. Chaque variante reflète une adaptation aux défis spécifiques : gestion des contraintes, rapidité de calcul, ou complexité des dynamiques.

III.2.2. Commande Prédictive Non Linéaire

La commande prédictive non linéaire (CPN) se distingue par sa robustesse intrinsèque : elle fonctionne malgré les incertitudes ou perturbations, sans nécessiter de modélisation explicite de ces dernières. Cette capacité découle de sa proximité conceptuelle avec la commande optimale, comme le montrent les travaux sur sa robustesse *inhérente* . Toutefois, d'autres approches intègrent directement perturbations et incertitudes via des formulations min-max ou des stratégies hybrides. Parmi elles :

- **CPN robuste** résolvant un problème min-max en boucle ouverte, ou s'appuyant sur la commande **H∞** .
- **CPN multi-objectif** combinant plusieurs critères d'optimisation .
- **CPN avec contrôleur par retour d'état** optimisé entre deux instants de calcul .

Selon Allgöwer et Findeisen , les piliers de la CPN sont :

1. **Modèles non linéaires** utilisés directement pour les prédictions.
2. **Contraintes explicites** sur les états et les entrées, intégrées dès la conception.
3. **Minimisation en temps réel** d'un critère de performance défini *en ligne*.
4. **Écart prédictif** : le comportement prédit diffère souvent de la réalité en boucle fermée.
5. **Résolution temps réel** d'un problème de contrôle optimal à chaque pas de calcul.
6. **Mesure ou estimation précise** des états du système pour alimenter les prédictions.

En résumé, la CPN allie rigueur théorique et pragmatisme industriel. Si elle excelle dans la gestion de systèmes complexes (non-linéarités, contraintes), son défi majeur reste le calcul en temps réel de solutions optimales, nécessitant des algorithmes efficaces et des modèles précis. Un équilibre délicat entre performance et faisabilité, qui explique son adoption progressive dans des secteurs exigeants comme l'énergie ou la robotique.

III.3. Principe de la Commande prédictive

La commande prédictive, ou Model Predictive Control (MPC), est une méthode avancée qui offre une solution intuitive et efficace pour le pilotage de systèmes complexes dans le domaine temporel. Son adoption croissante dans divers domaines d'ingénierie s'explique par sa capacité à gérer une variété de défis rencontrés dans les systèmes multivariables, instables, à retard, non linéaires ou hybrides. Cette approche se distingue par sa flexibilité et sa robustesse dans des environnements dynamiques et exigeants.

Le principe fondamental de la MPC peut être résumé en trois étapes clés, souvent illustrées par une analogie humaine, comme celle d'un skieur ajustant en permanence sa trajectoire en anticipant les virages à venir [11-10]. Ce processus peut être décrit comme suit :

1. **Prédiction** :
   La première étape consiste à utiliser un modèle dynamique du système pour prévoir son comportement futur sur un horizon de temps prédéfini. En se basant sur l'état actuel du système et les entrées appliquées, le contrôleur simule les évolutions possibles des variables d'état, telles que les positions, les vitesses ou les angles. Cette prédiction permet d'anticiper les conséquences des décisions actuelles et de tenir compte des contraintes physiques ou opérationnelles du système.
2. **Optimisation** :
   Une fois les trajectoires futures prédites, la MPC résout un problème d'optimisation en temps réel pour déterminer la séquence d'entrées qui minimise une fonction de coût. Cette fonction peut inclure des objectifs variés, tels que la minimisation de l'écart par rapport à une trajectoire cible, la réduction de la consommation d'énergie, ou le respect strict des limites imposées (par exemple, les contraintes de sécurité ou les capacités des actionneurs). L'optimisation garantit que les actions commandées respectent les exigences du système tout en maximisant ses performances.
3. **Correction** :
   Contrairement à des approches préprogrammées, la MPC réévalue ses décisions à chaque instant en tenant compte des nouvelles données mesurées. À chaque cycle, elle met à jour ses prédictions et ajuste les commandes en fonction des écarts observés entre le comportement prévu et l'état réel du système. Cette capacité d'adaptation en temps réel permet de compenser les incertitudes, les perturbations ou les erreurs de modélisation, assurant ainsi une réponse robuste et fiable.

Avantages de la commande prédictive

La MPC est particulièrement adaptée aux systèmes complexes pour plusieurs raisons :

- **Prise en compte des non-linéarités** : Elle peut gérer des systèmes où la relation entre les entrées et les sorties n'est pas linéaire, grâce à l'utilisation de modèles avancés.
- **Gestion des contraintes** : La MPC intègre directement les contraintes physiques et opérationnelles dans le processus d'optimisation, ce qui permet de garantir la faisabilité des commandes générées.

- **Adaptation en temps réel** : En réévaluant continuellement ses décisions, la MPC s'adapte aux changements dans l'environnement ou au comportement du système.

Applications typiques

La commande prédictive est utilisée dans des domaines variés, tels que :

- Le contrôle des processus industriels, où elle optimise les performances tout en respectant des limites de sécurité.
- Les systèmes robotiques, où elle gère des mouvements complexes en présence de perturbations.
- Les véhicules autonomes, où elle permet de planifier des trajectoires optimales tout en anticipant les obstacles et les conditions dynamiques.

Historique et Difficultés (Figure III.1)

L'étude des contraintes dans les lois de commande optimales remonte aux années 1950, marquant un véritable tournant dans le domaine de l'ingénierie des systèmes de contrôle. Cette époque a vu l'émergence de problématiques liées à la saturation des actionneurs et à leurs effets sur la stabilité et les performances des systèmes contrôlés. Pour y répondre, les premières solutions développées, telles que les techniques anti-windup, avaient pour objectif principal de corriger les commandes en cas de dépassement des limites.

Les techniques anti-windup, encore largement utilisées, reposent sur des ajustements a posteriori des signaux de commande. En cas de saturation des actionneurs, elles permettent de limiter les effets négatifs, tels que l'accumulation excessive de l'intégrale dans les régulateurs PID, qui pourrait autrement entraîner des comportements instables ou sous-optimaux. Leur popularité est en grande partie due à leur simplicité de mise en œuvre et à leur capacité à améliorer rapidement la stabilité locale du système sans nécessiter de modifications majeures dans les algorithmes de commande existants.

Cependant, ces approches présentaient des limites importantes :

- **Action locale** : Les corrections apportées par les techniques anti-windup se font uniquement après que la saturation a été détectée, sans mécanisme d'anticipation.
- **Manque de globalité** : En agissant uniquement sur une partie du problème, ces solutions n'intègrent pas une vision globale des contraintes dans la synthèse initiale des lois de commande.
- **Non-optimisation** : Ces méthodes ne prennent pas en compte l'impact global de la saturation sur les performances du système, ce qui limite leur efficacité dans des environnements dynamiques et complexes.

Ces défis ont conduit, à partir des années 1970, à l'émergence de nouvelles approches prenant en compte les contraintes dès la conception des lois de commande. Ces méthodes, plus sophistiquées, intègrent directement les limites des actionneurs et des variables d'état dans le processus de synthèse, ouvrant la voie à des stratégies de commande prédictive et optimales, comme le Model Predictive Control (MPC).

En somme, bien que les techniques anti-windup aient constitué une avancée significative en leur temps, elles ont progressivement été complétées, voire remplacées, par des méthodes plus intégrées et anticipatives, mieux adaptées aux besoins des systèmes modernes. La prise en compte des contraintes dès la phase de conception est désormais un standard incontournable dans l'ingénierie des systèmes complexes, permettant d'améliorer significativement les performances et la robustesse des commandes.

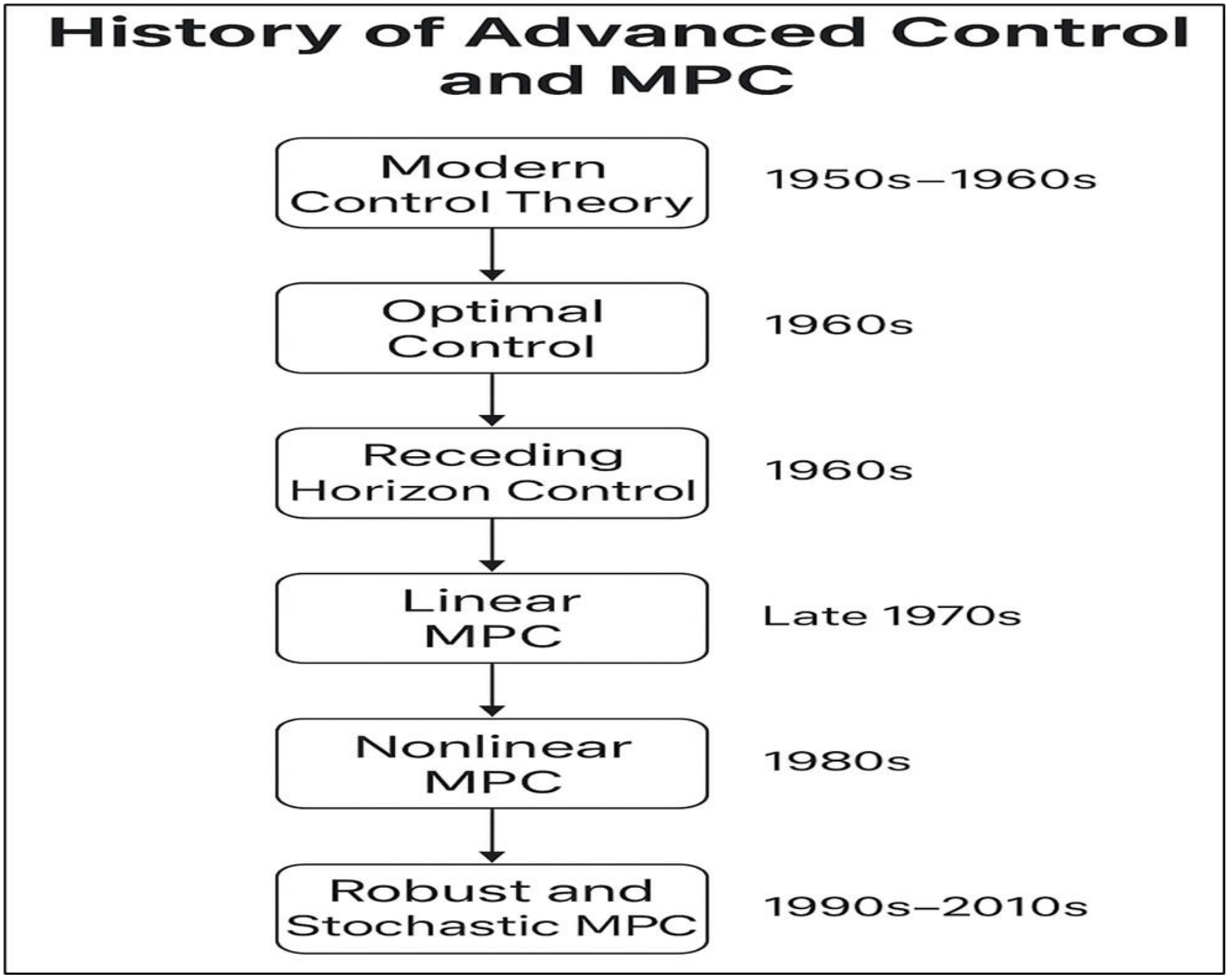

Figure III.1 : historique de théorie de control.

Dans les années 1990, une approche plus proactive émerge : les contraintes sont désormais intégrées *directement* dans la conception du contrôleur. Cette avancée s'appuie sur des théories comme :

- Les **ensembles invariants** pour les systèmes linéaires.
- Les **systèmes hybrides** (linéaires par morceaux).
- Les **fonctions de Lyapunov non quadratiques** pour l'analyse de stabilité.

Fonctionnement de la MPC

1. **Prédiction des sorties futures :**

Un modèle du processus est utilisé pour estimer les sorties sur un **horizon de prédiction** N_p. Ces prédictions, notées $y_p(k+j/k)$, (où $j=1,...,N_p$), dépendent :

- Des données passées (entrées/sorties connues jusqu'à l'instant *k*).
- Des commandes futures potentielles $u(k+j/k)$, calculées sur un **horizon de commande** N_c.

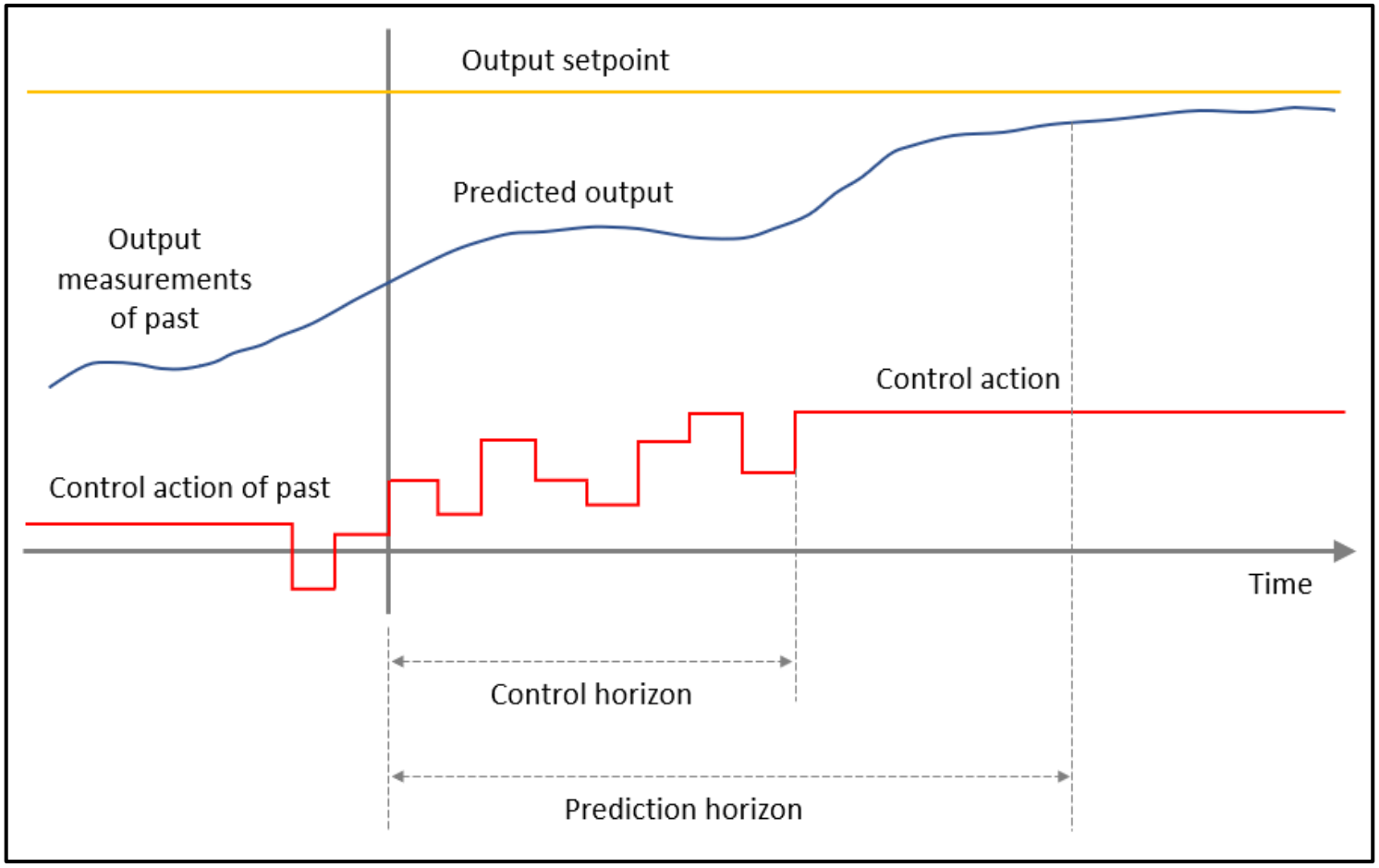

Figure III.2 : Fonctionnement de MPC.

2. **Optimisation des commandes :**

Les signaux de commande $u(k+j/k)$, $(j=0,...,N_c-1)$ sont déterminés en minimisant un critère de performance *J*. Ce critère :

- Réduit l'écart entre les sorties prédites y_p et la trajectoire de référence Yref.
- Limite l'effort de commande (énergie, variations brusques).
- Intègre éventuellement des contraintes (saturation des actionneurs, limites de sécurité).

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\|y_k - y_{\text{ref},k}\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2 \right] + \|y_N - y_{\text{ref},N}\|_P^2$$

fonction de coût J:

- La sortie du système yk suit de près la trajectoire de référence $y$ref,k.
- Les commandes uk restent dans des limites acceptables, en évitant des actions inutiles ou coûteuses.

3. **Application et réinitialisation**

   Seul le premier élément u(k) de la séquence optimisée est appliqué au système. À l'instant suivant *k*+1, le processus recommence avec les nouvelles mesures, actualisant les prédictions : c'est le principe de l'**horizon glissant** (ou *receding horizon*). Cette boucle fermée garantit une adaptation continue aux perturbations et variations du système.

L'analogie humaine : pourquoi la MPC est intuitive

La MPC reproduit un comportement naturel : lorsqu'un skieur anticipe sa trajectoire, il ne se base pas sur ses erreurs passées (regarder en arrière), mais sur une prédiction des virages à venir. De même, la MPC :

- **Anticipe** les erreurs futures via le modèle, contrairement aux commandes classiques réagissant aux erreurs passées.
- **Ajuste en temps réel** comme le skieur recalcule sa trajectoire à chaque virage.
- **Évite les à-coups** en planifiant des actions lisses sur un horizon fini.

Avantages et défis

- **Force principale** : Gestion native des contraintes et capacité à piloter des systèmes multivariables complexes.
- **Défi majeur** : Résolution en temps réel de problèmes d'optimisation, exigeant des modèles précis et des algorithmes efficaces (surtout pour les systèmes non linéaires).
- **Applications phares** : Robotique, énergie, aéronautique, où la précision et la robustesse sont critiques.

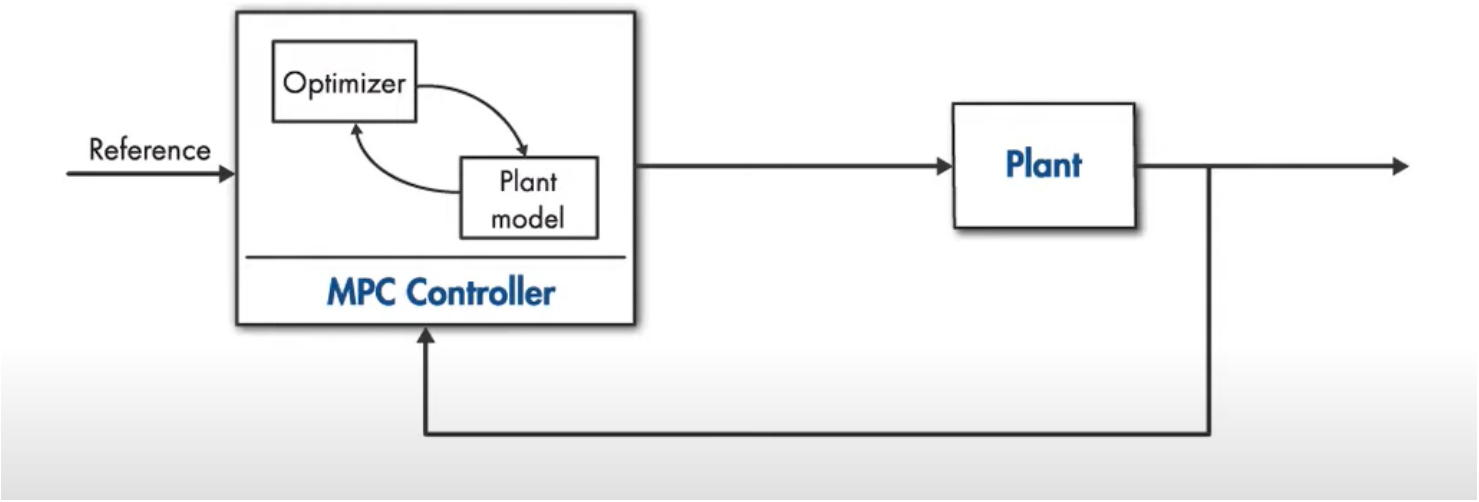

Figure III.4 : prédiction de comportement futur dans un MPC.

III.4. Éléments d'une Commande Prédictive

La commande prédictive (MPC) repose sur deux éléments fondamentaux : le modèle du système et le critère de performance, combinés à un algorithme d'optimisation. Chaque élément offre des options de conception, permettant d'adapter la MPC à une large gamme d'applications. Explorons ces composants en détail.

III.4.1. Le Modèle

Le modèle est l'élément clé qui distingue la MPC des autres méthodes de commande. Il sert à prédire le comportement futur du système en réponse à des entrées potentielles. Sa précision et sa structure influencent directement la performance du contrôleur.

Types de Modèles

1. **Modèles Linéaires**
   - **Exemples** : Modèles ARX (AutoRegressive with eXogenous input), CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average), ou représentation d'état.
   - **Avantages** : Simplicité, calculs rapides, idéal pour les systèmes stables et faiblement non linéaires.
   - **Limites** : Inadaptés aux systèmes fortement non linéaires ou à dynamiques complexes (ex : réacteurs chimiques).
2. **Modèles Non Linéaires**

- **Exemples** : Modèles physiques (équations différentielles non linéaires), réseaux de neurones, modèles NARX.
- **Avantages** : Capturent des comportements complexes (ex : robotique, aérodynamique).
- **Défis** : Coût calculatoire élevé, nécessité de solveurs d'optimisation non linéaires.

3. **Modèles Hybrides**
   - Combinaison de dynamiques continues et discrètes (ex : systèmes électromécaniques avec modes de fonctionnement discrets).
4. **Modèles Data-Driven**
   - Basés sur des données expérimentales ou des apprentissages machine (ex : modèles de régression, LSTM pour séries temporelles).
   - **Cas d'usage** : Systèmes difficiles à modéliser analytiquement (ex : processus biologiques).

III.4.2. Paramètres de réglage

Pour les lois de commande classiques (de type PID par exemple), on retrouve comme paramètres de réglage l'amplification, le temps d'action intégrale, le temps d'action dérivée, ou des paramètres liés aux caractéristiques fréquentielles comme la bande passante, les marges de stabilité …etc. Dans le cas des lois prédictives, les paramètres sont d'une toute autre nature de par la formulation temporelle des objectifs de commande. Enumérer tous les paramètres de réglage n'est pas chose aisée à cause de la multitude des approches prédictives existantes. Malgré tout, les paramètres de synthèse que l'on retrouve comme dénominateur commun de la majorité des stratégies existantes sont :

- ✓ **Les horizons**
  - de contrainte: qui décrivent explicitement les intervalles sur lesquels on prend en compte les restrictions physiques ou de performances.
  - de prédiction: sur lesquels les performances du système asservi sont évaluées.
  - de commande: qui expriment la liberté autorisée à chaque pas d'échantillonnage pour construire des séquences optimales en boucle ouverte.
- ✓ **Les pondérations intervenant dans le critère de performance**
  - sur les erreurs.
  - sur l'effort de commande.
  - sur l'évolution de la dynamique du système.
- ✓ **Les paramètres terminaux**
  - contraintes terminales.
  - coûts terminaux.

III.5. Avantages et Inconvenients de la Commande Predictive

Les avantages les plus importants que le MPC présente par rapport aux autres méthodessont les suivants :

- Il peut être employé pour contrôler une grande variété de processus, des systèmes avec un comportement relativement simple à d'autres qui présentent un comportement dynamique peu habituel comme ceux avec de grands retards, oscillant fortement, de phase non minimale ou instables.
- Il possède intrinsèquement la compensation de retard et la compensation par anticipation (feedforward) de perturbations mesurables.
- Il est particulièrement intéressant pour les ingénieurs n'ayant qu'une connaissance limitée en contrôle car les concepts sont très intuitifs et que le réglage est très simple.
- Les cas multivariables peuvent être facilement traités.
- Les contrôleurs linéaires résultants sont faciles à implanter.
- Le traitement des contraintes est conceptuellement simple et il peut être inclus systématiquement lors du processus de conception.
- Il est très pratique lorsque les consignes futures sont connues (en robotique ou pour les procédés discontinus).
- Il s'agit d'une méthodologie complètement ouverte dont les principes de base permettent des extensions futures.
- A ces observations, la possibilité d'étendre la méthodologie aux cas non linéaires et la prise en considération du modèle du procédé de façon explicite dans le contrôleur devraient être ajoutées.

III.6. Conclusion

Ce chapitre a permis d'explorer les fondements théoriques et l'évolution des méthodes de commande prédictive, qu'elles soient linéaires ou non linéaires. Nous avons présenté le principe général de cette approche, en insistant sur ses particularités qui en font une méthode largement répandue dans la communauté automaticienne et industrielle.

Le Modèle Prédictif contrôle (MPC) se distingue par sa capacité à anticiper le comportement futur d'un système tout en intégrant efficacement les contraintes physiques et opérationnelles. Basé sur le principe de l'horizon glissant, il résout des problèmes de commande optimale sur un horizon fini. Sa description temporelle facilite la prise en compte des limitations des systèmes, permet de formuler des spécifications sous forme de contraintes sur la trajectoire prédite, et offre la possibilité de stabiliser le système par l'ajout de contraintes auxiliaires dans le problème d'optimisation.

Nous avons mis en évidence sa robustesse, sa flexibilité et son aptitude à gérer des systèmes complexes. Des concepts clés comme l'horizon de prédiction, l'optimisation en temps réel et l'intégration des contraintes ont été approfondis, expliquant pourquoi le MPC reste une technique incontournable, tant dans l'industrie que dans la recherche avancée.

Cette synthèse souligne à la fois son efficacité pratique et sa puissance théorique, consolidant sa place parmi les méthodes de commande les plus prometteuses.

IV. Application du MPC Linéaire au Contrôle d'un Pendule Inversé

IV.1.1 Objectif

L'objectif fondamental du système de contrôle du pendule inversé est de parvenir à stabiliser ce dernier en position parfaitement verticale, correspondant à un angle theta = 0. Cette configuration représente une position d'équilibre instable, où toute déviation, même infime, entraîne rapidement un déséquilibre si elle n'est pas corrigée. Pour atteindre cet objectif, plusieurs défis doivent être surmontés, en particulier lorsque le pendule commence en position basse. Dans ce cas, il est nécessaire d'appliquer une stratégie sophistiquée appelée **basculement (swing-up)** [1]. Cette technique consiste à générer des oscillations contrôlées pour transférer progressivement de l'énergie au pendule et le guider de manière stable vers sa position verticale d'équilibre.

En parallèle, un autre objectif essentiel est de maintenir le chariot dans une position centrale sur la piste, c'est-à-dire à x_{ref}. Ce point d'équilibre assure non seulement une configuration stable du système, mais garantit également que le chariot reste dans les limites physiques de la piste, évitant ainsi des collisions ou des dépassements de zone. L'interaction entre ces deux tâches – le redressement du pendule et la stabilisation de la position du chariot – représente un défi particulièrement complexe, car elles sont intimement liées par la dynamique non linéaire du système.

La réalisation simultanée de ces deux objectifs nécessite une approche de contrôle rigoureuse et bien pensée. En effet, le pendule inversé est un exemple typique de système complexe où un petit nombre d'actionneurs (souvent un seul moteur pour déplacer le chariot) doit gérer plusieurs degrés de liberté. Cela impose une coordination fine et une réactivité élevée de la part du contrôleur, qui doit être capable de :

1. **Gérer des dynamiques rapides** : Les constantes de temps du système étant très courtes, le contrôleur doit réagir presque instantanément aux variations des variables d'état pour éviter toute instabilité.
2. **Compensations précises** : Les interactions entre le mouvement du pendule et celui du chariot impliquent des forces complexes qui doivent être précisément compensées pour atteindre un équilibre global.
3. **Anticiper les comportements** : Le contrôleur doit être suffisamment robuste pour anticiper les effets des perturbations externes et des non-linéarités inhérentes au système.

Pour relever ce défi, différentes techniques de contrôle peuvent être envisagées, telles que les stratégies classiques de type PID, les approches modernes comme la commande prédictive (MPC) [13], ou encore les contrôleurs non linéaires basés sur des méthodes énergétiques. Chaque méthode présente ses avantages et ses inconvénients, et le choix dépend souvent des performances requises, des contraintes du système, et de la

complexité de l'implémentation. Ce travail met particulièrement l'accent sur l'importance d'un contrôleur précis et réactif, capable de gérer la double exigence de redressement du pendule et de stabilisation du chariot, tout en maintenant la robustesse face aux incertitudes et perturbations.

IV.1.2 Paramètres de conception du contrôleur prédictif du modèle

La conception du contrôleur MPC (Model Prédictive Control) intègre des contraintes essentielles, notamment des limites d'angle de braquage. Les termes suivants sont utilisés dans ce contexte :

k représente le pas d'échantillonnage actuel ,et Ts le pas de temps de contrôle.

L'horizon de prédiction (P) désigne le nombre de pas de temps futurs utilisés par le MPC pour prédire le comportement du système.

L'horizon de contrôle (M) définit le nombre d'actions de contrôle planifiées entre le pas de temps actuel et k + P.

Le choix des paramètres de conception appropriés pour le contrôleur MPC est crucial, car ils ont un impact direct sur les performances du système et sur l'effort de calcul requis pour résoudre le problème d'optimisation. Ce choix doit trouver un équilibre entre l'obtention de performances souhaitées et le maintien d'une complexité de calcul gérable. Des directives standard peuvent aider à déterminer les valeurs appropriées pour ces paramètres.

Temps d'échantillonnage (Ts) : La fréquence d'exécution de l'algorithme de contrôle par le contrôleur est déterminée par l'intervalle de temps Ts. Si ce pas de temps est trop long, le contrôleur risque de ne pas réagir suffisamment vite face aux perturbations, ce qui peut dégrader les performances du système. À l'inverse, un pas de temps trop court permet une réaction plus rapide du contrôleur, mais augmente considérablement la charge de calcul. Il est donc conseillé de choisir Ts de manière à ce qu'il corresponde à environ 10 à 20 échantillons du temps de montée d'un système en boucle ouverte. Un temps d'échantillonnage optimal a été déterminé égal à 0.1s.

Horizon de prédiction (P) : L'horizon de prédiction P doit être défini de manière à capturer les variations dynamiques du système. Il est généralement recommandé de choisir une valeur de P permettant de couvrir entre 20 et 30 échantillons de la réponse du système de transport en boucle ouverte. Dans ce contexte, un horizon de prédiction optimal a été déterminé égal à 10.

Horizon de contrôle (M) : Seuls les deux mouvements de contrôle ont un impact significatif sur le comportement de la réponse. Choisir un horizon de contrôle large ne fera qu'accroître la complexité des calculs. Une faible valeur de M assure la stabilité, tandis qu'une valeur élevée réduit la robustesse.

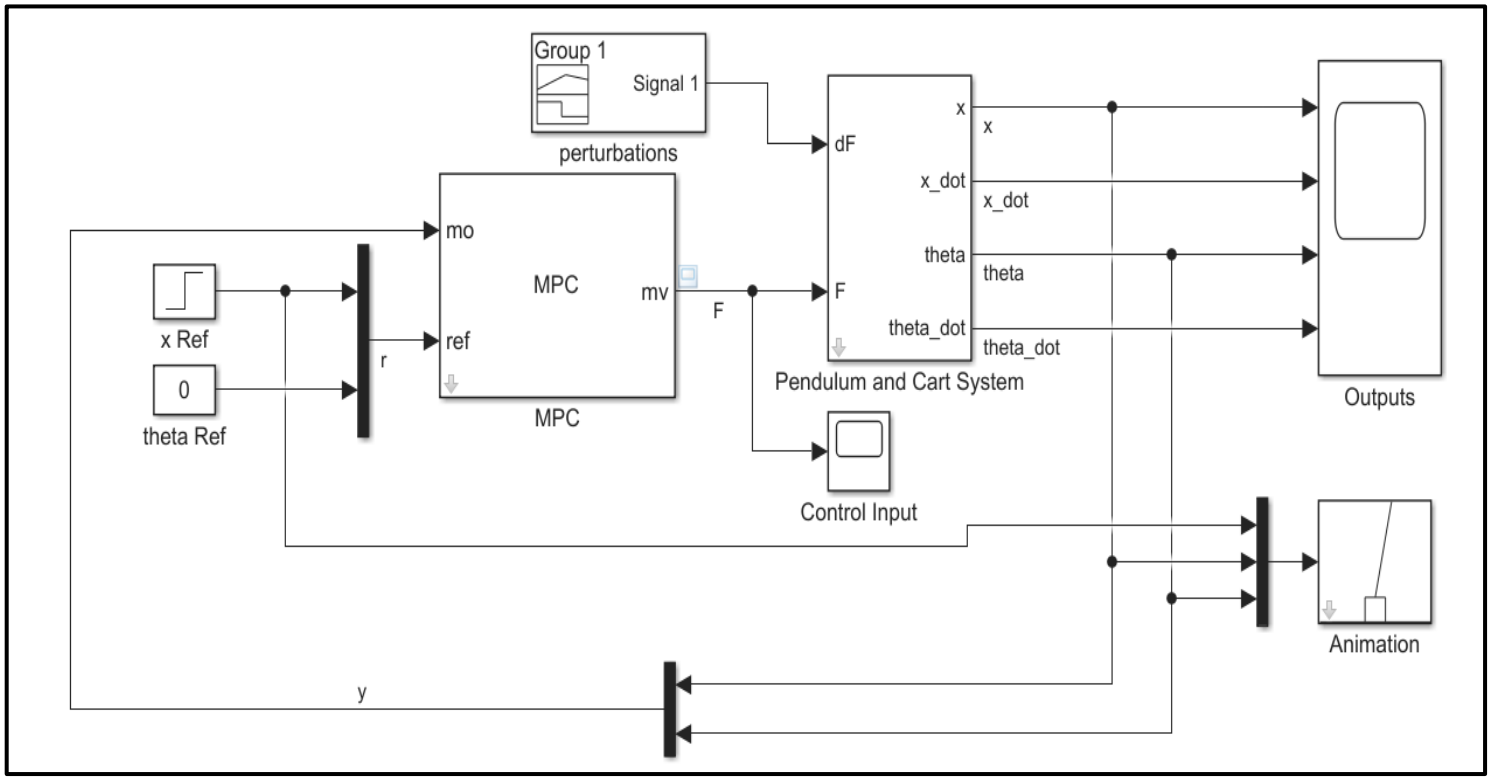

Figure IV.1 : Structure de la commande par MPC (simulink)

IV.2 *Commande prédictive linéaire*

La simulation est effectuée sur une durée de 30 secondes, avec un pas d'échantillonnage Ts=0.01. Le système étudié est composé d'un chariot et d'un pendule inversé. L'objectif est de stabiliser le chariot à la position centrale (x_ref=5) et le pendule en position verticale (theta_ref=0) sans aucune force externe appliquée.

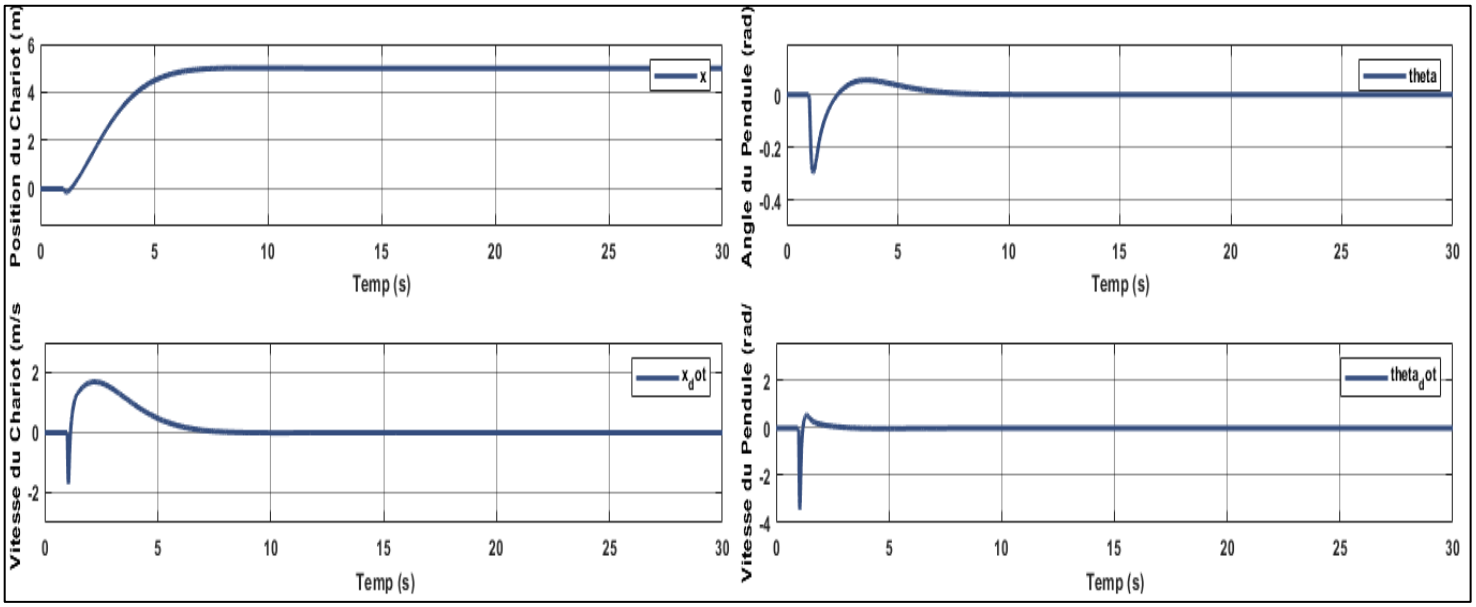

Figure IV.2 : Test de suivi ,(x) position de chariot , (x_dot) vitesse de chariot , (theta) L'angle de pendule ,(theta_dot) Vitesse de pendule .

Explication des résultats

Dans ce scénario sans perturbations, le contrôleur MPC parvient à stabiliser efficacement le système chariot-pendule inversé, en amenant les états vers leurs valeurs de référence.

- **Rapidité :** Les 4 états principaux (position x, vitesse x_dot, angle theta, et vitesse angulaire theta_dot) convergent rapidement vers la référence. La stabilisation complète est atteinte en moins de 5 secondes, démontrant une grande réactivité du système.
- **Précision et stabilité :** Les trajectoires des états atteignent leurs objectifs sans oscillations notables ni dépassements. Cela montre que, en l'absence de perturbations, le MPC maintient un contrôle optimal et précis.
- **Analyse des états :**
  - La position du chariot (x) et son angle de pendule (theta) convergent sans déviation, indiquant une stabilisation parfaite.
  - Les vitesses associées (x_dot et theta_dot) tendent également vers zéro de manière fluide, confirmant l'absence de mouvements résiduels indésirables.

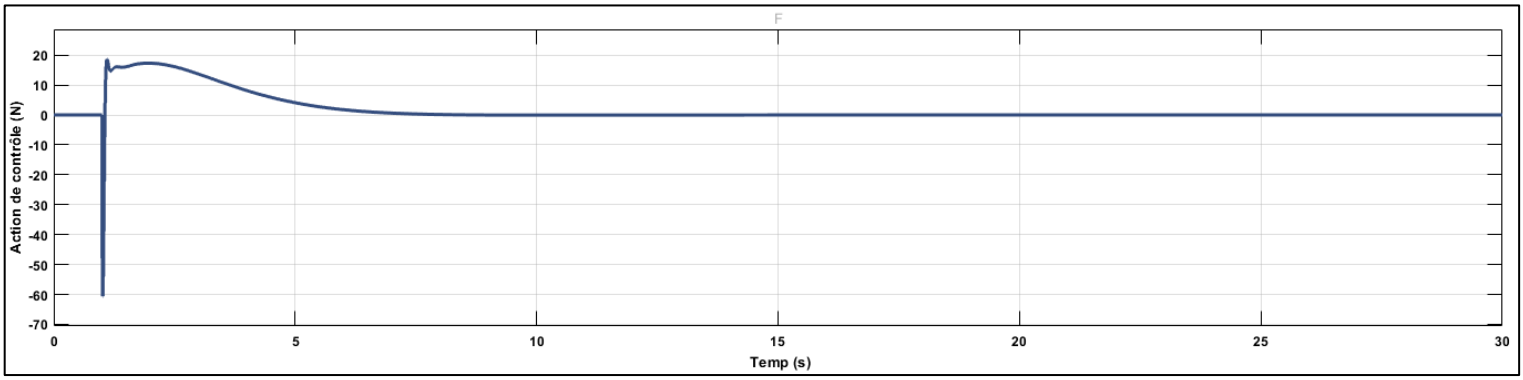

Figure IV.3 : Action de contrôle pour le test de régulation.

Ces résultats mettent en évidence l'efficacité du MPC dans un environnement non perturbé, garantissant une stabilisation rapide et fiable du système tout en respectant les contraintes dynamiques.

IV.3 *Commande prédictive linéaire* avec perturbation appliquée

La simulation est effectuée sur une durée de 30 secondes, avec le temps d'échantillonnage Ts=0.01, un chariot avec pendule inversé, soumis à des perturbations (dF), tout en visant la position idéale : chariot au centre (x_ref=5) et pendule en position vertical (theta ref=0).

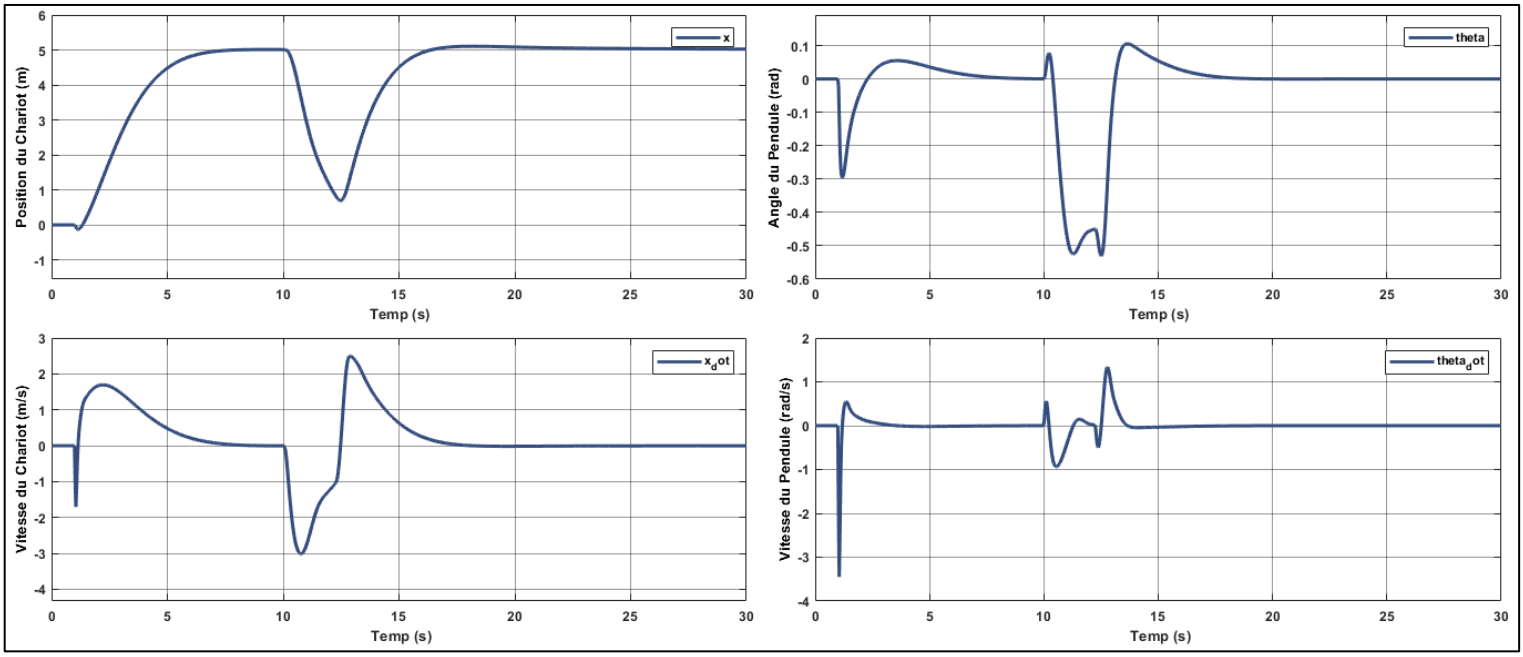

Figure IV.4 : Test de suivi avec perturbations,(x) position de chariot , (x_dot) vitesse de chariot , (theta) L'angle de pendule ,(theta_dot) Vitesse de pendule .

Le contrôleur MPC doit corriger en temps réel les déviations causées par les perturbations, en calculant une force F. Les résultats révèlent si le système retrouve rapidement son équilibre après chaque perturbation et reste stable, prouvant sa robustesse.

Explication des résultats

Rapidité : Malgré les perturbations dF, les 4 états convergent vers 0 en moins de 5 secondes.

Robustesse aux perturbations : À t=10s et t=15s, des pics de perturbations sont clairement visibles sur theta_dot (vitesse angulaire), le MPC adapte rapidement, ramène le système à l'équilibre sans dépassement de contraintes.

Cette robustesse et rapidité est claire dans la comparaison de la position de référence et la position de sortie (x) (voir la figure IV.3), la réaction de système et contre action à ces perturbations est évidemment claire. On peut dire que cette méthode de contrôle est fiable et solide.

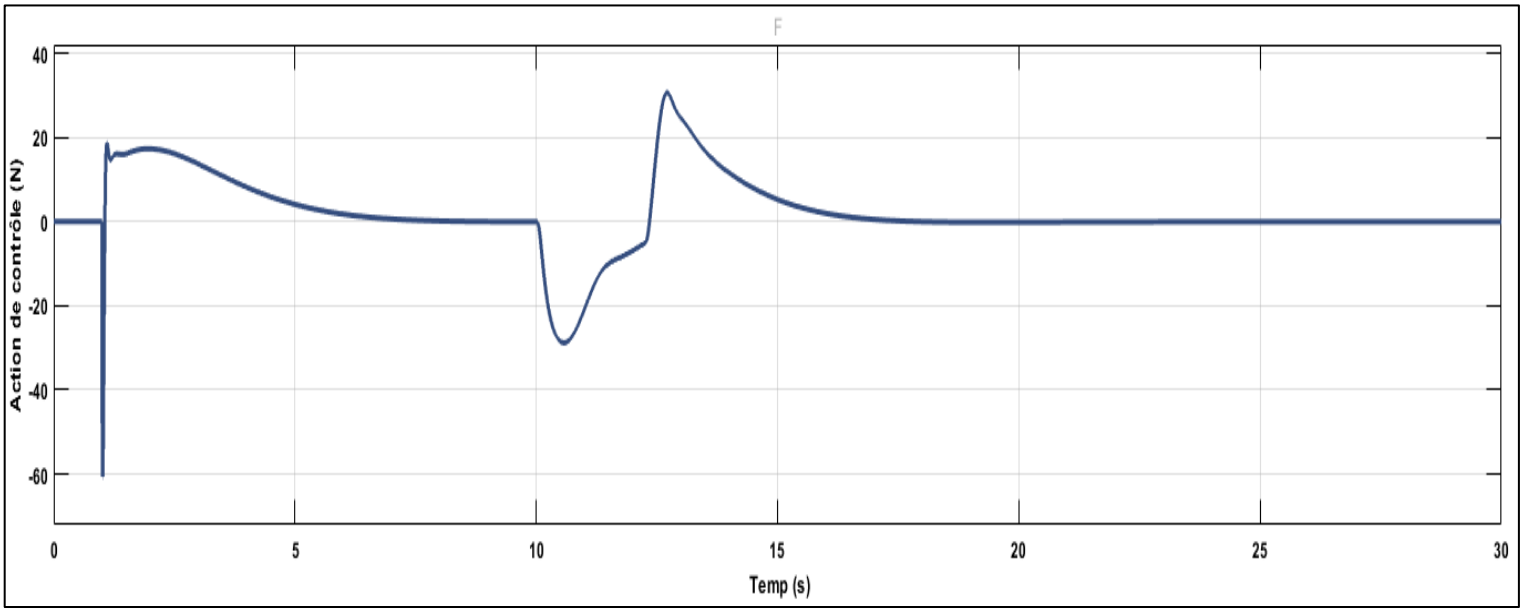

Figure IV.5 : Action de contrôle pour le test de régulation.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le cadre de la commande prédictive linéaire (MPC) a été appliqué à la stabilisation du pendule inversé. Le contrôleur a efficacement maintenu le pendule en position verticale tout en gérant les perturbations et les contraintes du système. Les résultats ont démontré :

- Une convergence rapide des variables d'état vers l'équilibre en un temps minimal.
- Une robustesse face aux perturbations extérieures, mettant en évidence la capacité du système à se rétablir après des déviations.
- Une optimisation des performances sous contraintes, garantissant que le chariot et le pendule respectent les limites prédéfinies.

La mise en œuvre réussie de la MPC linéaire valide son aptitude aux applications en temps réel dans des systèmes présentant des non-linéarités modérées. Cependant, ses limites dans la gestion des dynamiques fortement non linéaires ouvrent la voie à l'exploration de la commande prédictive non linéaire dans le chapitre suivant.

V.

Commande Non Linéaire par MPC : Swing-up

V.1 MPC Non-Linéaire (NMPC)

Cette étude a pour objectif principal d'évaluer en profondeur la robustesse et l'efficacité du Nonlinear Model Predictive Control (NMPC) [10],lorsqu'il est appliqué à un système présentant une forte non-linéarité. En tant que méthode avancée de commande, le NMPC offre des capacités intéressantes pour gérer des dynamiques complexes, mais il est également confronté à des défis liés à la précision des modèles, à la rapidité des calculs en temps réel et à la gestion des contraintes opérationnelles.

Dans ce contexte, nous choisissons comme cas d'application le problème classique du swing-up d'un pendule inversé. Ce système est reconnu comme une plateforme de référence en ingénierie de contrôle, car il combine une instabilité naturelle et une dynamique non linéaire marquée. Le processus de swing-up [9], qui consiste à amener le pendule de sa position pendante stable à sa position verticale instable, tout en maintenant la stabilisation du chariot, exige une stratégie de commande précise et adaptée. Ce problème complexe constitue un excellent banc d'essai pour mettre en évidence les atouts et les limites du NMPC.

L'étude se concentrera particulièrement sur la capacité du NMPC à :

1. **Gérer efficacement les non-linéarités du modèle** : Le pendule inversé présente des non-linéarités significatives dans sa dynamique, en raison de la relation non linéaire entre les forces appliquées, les angles, et les vitesses. L'un des objectifs est de démontrer que le NMPC peut anticiper ces comportements complexes et fournir des commandes optimales malgré ces caractéristiques.
2. **Garantir la stabilisation autour du point d'équilibre instable** : Une fois le pendule amené à sa position verticale, le maintien de cette position nécessite un contrôle précis pour compenser les perturbations externes et internes. Le NMPC devra prouver son efficacité en termes de robustesse et de réactivité.

Au-delà de ces aspects, l'étude analysera également des éléments pratiques tels que :

- **La gestion des contraintes** : Le NMPC permet de prendre en compte explicitement des contraintes sur les variables d'état et de commande, ce qui est crucial pour éviter des situations irréalisables ou des dépassements mécaniques.
- **L'impact des incertitudes** : L'efficacité du NMPC sera testée dans des scénarios où des incertitudes sont introduites dans le modèle ou dans les conditions initiales, afin de vérifier sa robustesse face à des variations imprévues.
- **Les performances en temps réel** : Le NMPC nécessite des calculs itératifs en temps réel pour résoudre les problèmes d'optimisation. L'étude évalue la capacité de cette

méthode à répondre aux exigences de temps réel tout en maintenant des performances élevées.

En conclusion, cette étude vise à démontrer que le NMPC peut non seulement gérer les défis associés aux systèmes non linéaires complexes, mais également offrir des performances supérieures dans des conditions opérationnelles variées. Les résultats obtenus permettront de mieux comprendre les avantages et les limitations de cette approche, tout en proposant des pistes pour l'amélioration et l'optimisation des stratégies de commande prédictive non linéaire.

V.1.1 Introduction au MPC Non-Linéaire (NMPC)

- **Le MPC classique** utilise une *carte simplifiée* (modèle linéaire) : valable pour de petits écarts près de l'équilibre.
- **Le NMPC** embarque une *carte topographique 3D* (modèle non-linéaire).

Voici une petite comparaison entre NMPC et MPC :

Critère	MPC	NMPC (MPC Non-Linéaire)
Modèle utilisé	Modèle linéarisé (autour du point d'équilibre)	Modèle physique complet (non-linéaire)
Zone de fonctionnement	Proche de l'équilibre	-180° à 180°
Robustesse	Limitée (sensible aux grands écarts)	Élevée
Temps de calcul	Rapide (adapté aux systèmes rapides)	Plus lent (nécessite plus de puissance)
Applications	Régulation de procédés industriels	Robotique, aérospatial, systèmes complexes

Tableau V.1 : Comparaison entre NMPC et MPC.

V.2 Test de suivi avec MPC Non-Linéaire (NMPC)

Un test de suivi a été mené sur le système pendule inversé monté sur chariot afin d'évaluer les performances du contrôleur dans un scénario de commande typique. Le test débute avec le pendule en position basse, correspondant à un angle initial de theta=−π (point pendulaire), tandis que le chariot est initialement au repos, sans mouvement (x_dot = 0). Ce test a pour but de mettre en évidence la capacité du contrôleur à gérer deux objectifs principaux :

1. **Effectuer la manœuvre de redressement (swing-up)** : Cette étape consiste à amener le pendule de sa position basse stable à sa position verticale instable (theta = 0) en minimisant les oscillations tout en assurant la continuité et la fluidité du mouvement.
2. **Ramener le chariot à l'arrêt au centre de la piste** : Une fois le pendule en position verticale, le chariot doit être stabilisé au centre de la piste, sans mouvement (x_dot = 0), afin d'atteindre un état d'équilibre global.

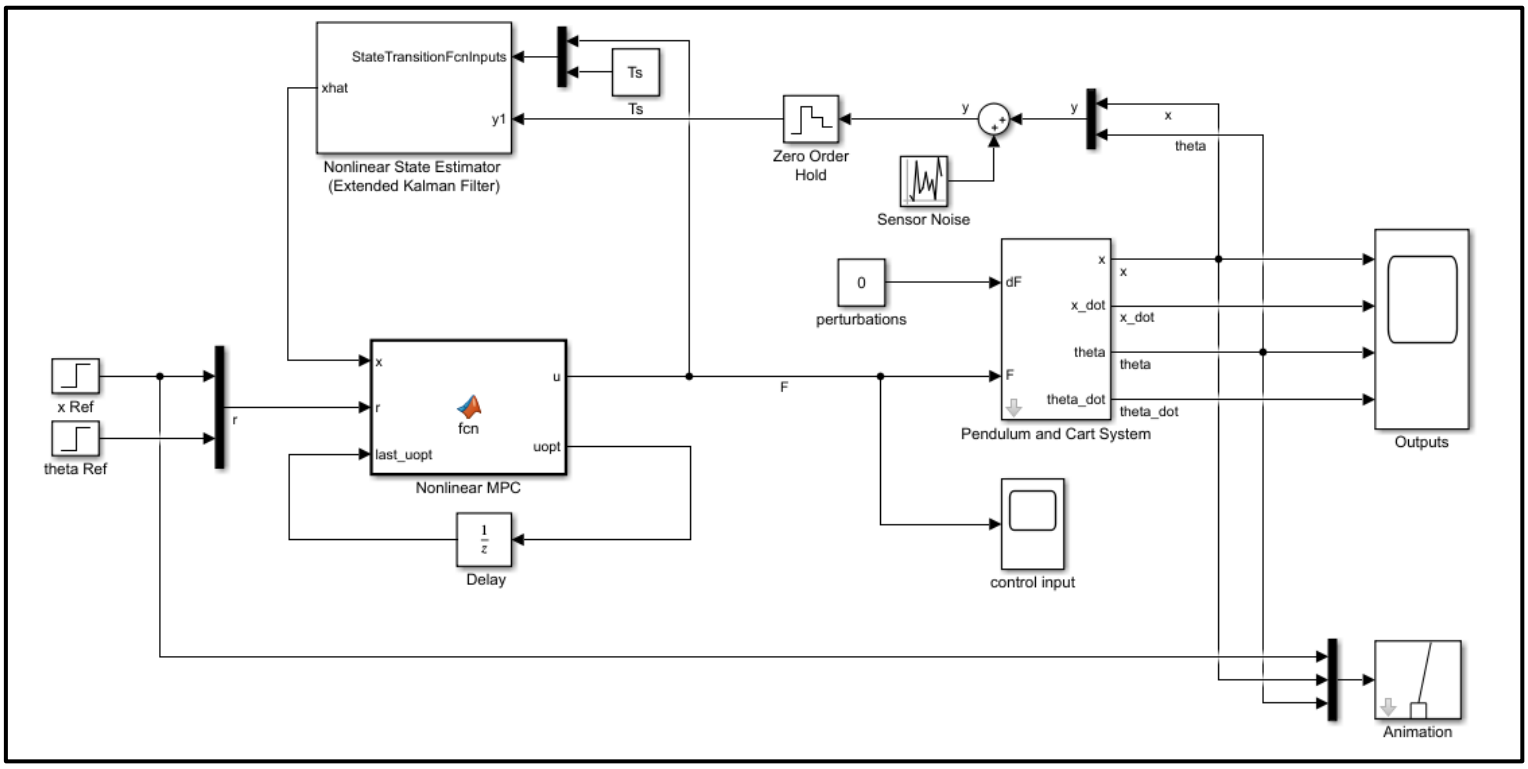

Figure V.1 : Structure de la commande par NMPC.

Pour ce test, aucune force de perturbation externe (dF = 0) n'a été appliquée, ce qui permet d'évaluer les performances du contrôleur dans des conditions idéales, sans impact d'incertitudes ou de perturbations environnementales. Cela fournit une première validation des stratégies de commande utilisées avant de les confronter à des scénarios plus complexes et réalistes.

La tâche est particulièrement exigeante en raison des caractéristiques intrinsèques du système :

- **Non-linéarité dynamique** : La relation entre les variables d'état (angle, position, vitesses) et les actions de commande (forces appliquées au chariot) est fortement non linéaire, rendant difficile la prédiction et le contrôle précis des mouvements.
- **Instabilité naturelle** : Le pendule inversé est instable par nature, nécessitant un contrôle constant pour éviter qu'il ne retombe dans sa position pendante.
- **Commande sous-actionnée** : Le système dispose d'un nombre limité d'actionneurs (seulement sur le chariot), ce qui impose des contraintes supplémentaires pour contrôler simultanément la position du chariot et l'angle du pendule.

Les résultats obtenus lors de ce test mettent en lumière la réponse dynamique du système et démontrent l'efficacité du contrôleur basé sur le Model Predictive Control (MPC). En particulier :

- **Transition fluide vers l'état vertical** : Le pendule a été redressé sans oscillations excessives, attestant de la capacité du contrôleur à anticiper et compenser les effets de la dynamique non linéaire.
- **Stabilisation précise** : Une fois le pendule en position verticale, le chariot a été ramené à l'arrêt au centre de la piste, atteignant ainsi l'état d'équilibre global avec un mouvement résiduel minimal.
- **Robustesse de la commande** : Malgré la complexité du système, le contrôleur a démontré une capacité à respecter les objectifs définis tout en maintenant des performances stables et prévisibles.

Ce test valide l'approche MPC pour ce type de système dynamique et pose les bases pour des scénarios plus complexes, intégrant des perturbations externes, des contraintes supplémentaires, ou des incertitudes dans le modèle.

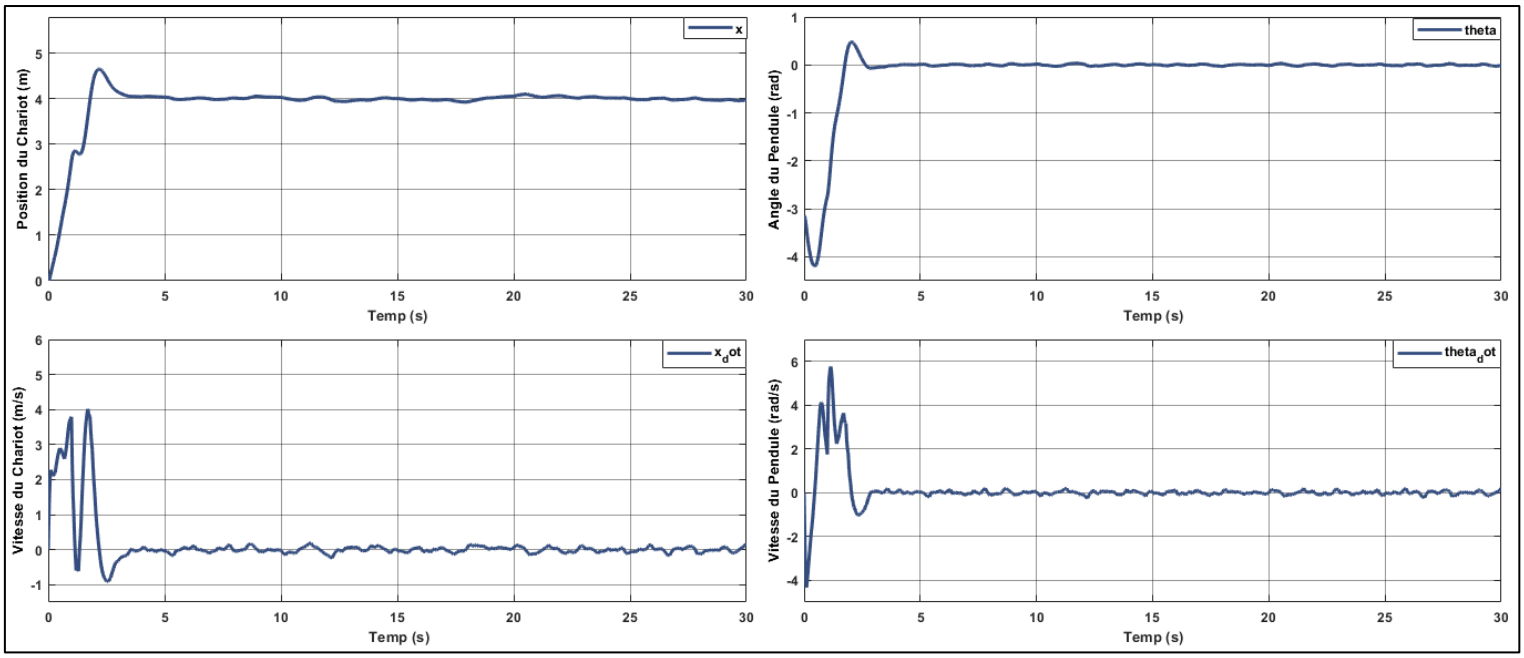

Figure V.2 : Test de suivi,(x) position de chariot , (x_dot) vitesse de chariot , (theta) L'angle de pendule ,(theta_dot) Vitesse de pendule .

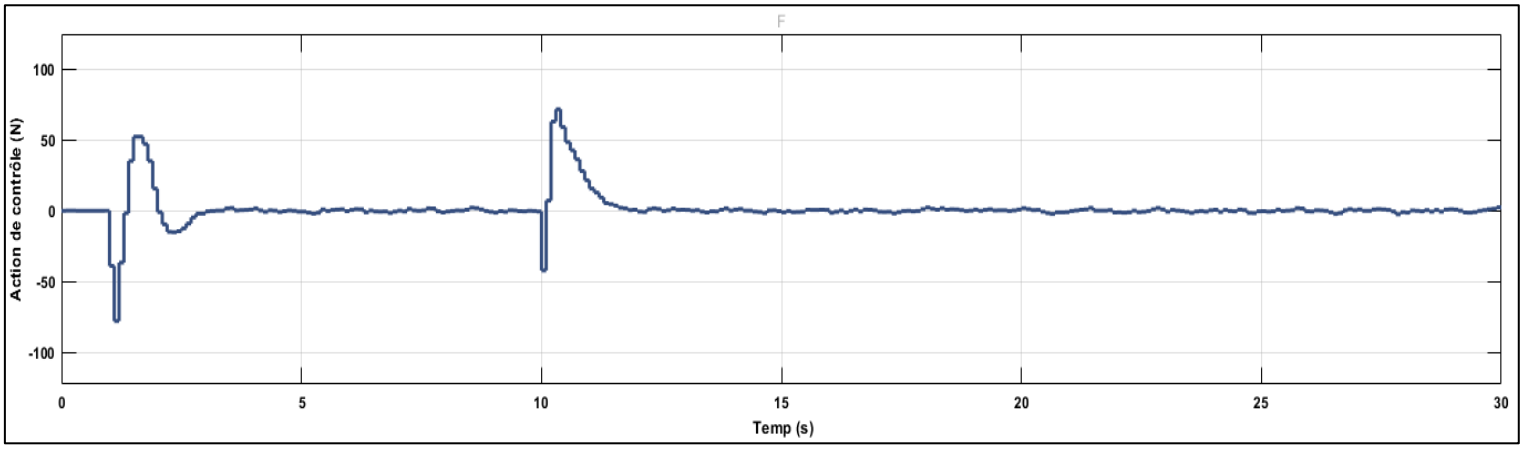

Figure V.3 : Action de contrôle pour le test de régulation.

Les figures représentent l'évolution temporelle (de 0 à 30 secondes) des variables d'état d'un système de pendule inverse sur chariot contrôlé par une commande prédictive non linéaire (NMPC) pour une manœuvre de "swing-up" (redressement).

Le chariot se déplace d'abord dans une direction pour initier le mouvement du pendule, On observe des oscillations de position qui correspondent aux actions nécessaires pour accumuler de l'énergie dans le pendule. Après le swing-up (vers t=15-20s), la position se stabilise autour d'une valeur constante où le pendule est maintenu vertical.

Le régime stabilisé (après t=5s), la vitesse tend vers zéro. En régime stabilisé, les oscillations deviennent très faibles.

V.3 Test de suivi avec perturbation appliquée

Après avoir démontré que le Nonlinear Model Predictive Control (NMPC) est capable de gérer efficacement des manœuvres complexes, telles que la manœuvre de redressement (swing-up), dans des conditions idéales sans perturbations ni défis externes, nous élargissons notre étude pour évaluer la robustesse et la résilience de cette méthode de contrôle dans des scénarios plus réalistes.

Dans cette phase, une force de perturbation externe, notée dF, est introduite dans le système. Cette perturbation peut simuler diverses situations rencontrées dans des applications pratiques, telles que des forces externes imprévues, des variations environnementales ou des erreurs dans les capteurs. L'objectif est de vérifier si le NMPC peut toujours maintenir les performances souhaitées, malgré ces nouvelles contraintes, et garantir la stabilité et le contrôle du système.

Ce test vise à analyser plusieurs aspects critiques du NMPC :

1. **Capacité à compenser les perturbations** : Lorsqu'une perturbation est appliquée, le contrôleur doit détecter rapidement cette modification et ajuster les forces de commande pour ramener le système à son état cible.
2. **Maintien de la stabilité** : Malgré la perturbation, le NMPC doit empêcher le système de dévier de manière significative de son point d'équilibre ou de sa trajectoire souhaitée, en minimisant les oscillations ou les mouvements indésirables.
3. **Robustesse globale** : Le contrôleur doit démontrer sa capacité à fonctionner efficacement sous des conditions dynamiques difficiles, tout en respectant les contraintes du système.

Dans ce contexte, plusieurs scénarios de perturbations peuvent être considérés :

- **Perturbations constantes** : Une force appliquée dans une direction fixe, simulant des erreurs persistantes ou des forces environnementales telles que le vent.
- **Perturbations dynamiques** : Des forces variables dans le temps, qui changent d'intensité ou de direction, imitant des interactions complexes ou des fluctuations externes.
- **Perturbations aléatoires** : Des forces imprévisibles, simulant des chocs ou des impacts accidentels sur le système.

Les résultats de cette analyse permettront d'évaluer la résilience du NMPC face à ces défis. Un contrôleur efficace doit non seulement compenser les effets des perturbations rapidement, mais aussi minimiser les mouvements résiduels et éviter toute instabilité prolongée.

Cette étape est essentielle pour valider l'applicabilité pratique du NMPC dans des environnements réels, où les perturbations et les incertitudes sont omniprésentes. En conclusion, cette étude approfondie de la réponse du NMPC face aux perturbations contribue à démontrer son potentiel comme méthode de contrôle robuste pour des systèmes non linéaires complexes, tels que le pendule inversé, dans des conditions réalistes et exigeantes.

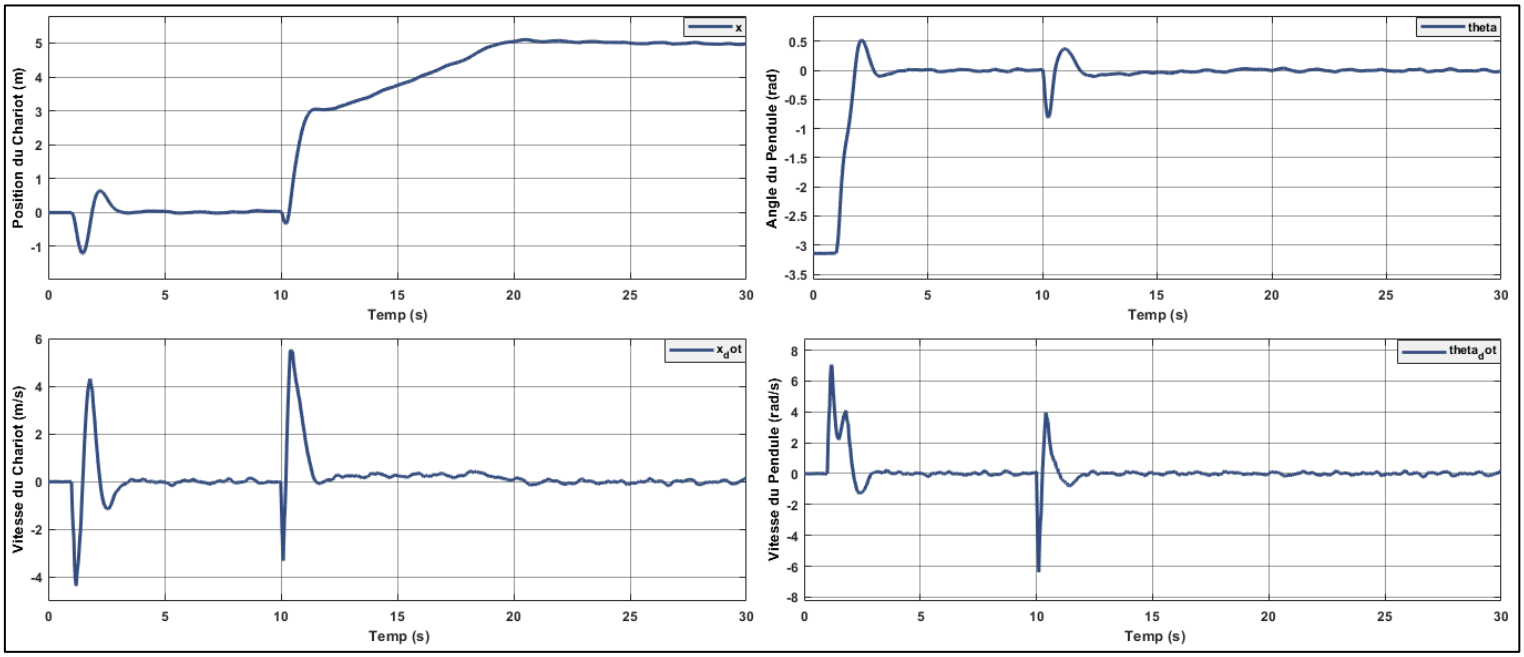

Figure V.4 : Test de suivi,(x) position de chariot avec perturbations (dF), (x_dot) vitesse de chariot , (theta) L'angle de pendule ,(theta_dot) Vitesse de pendule .

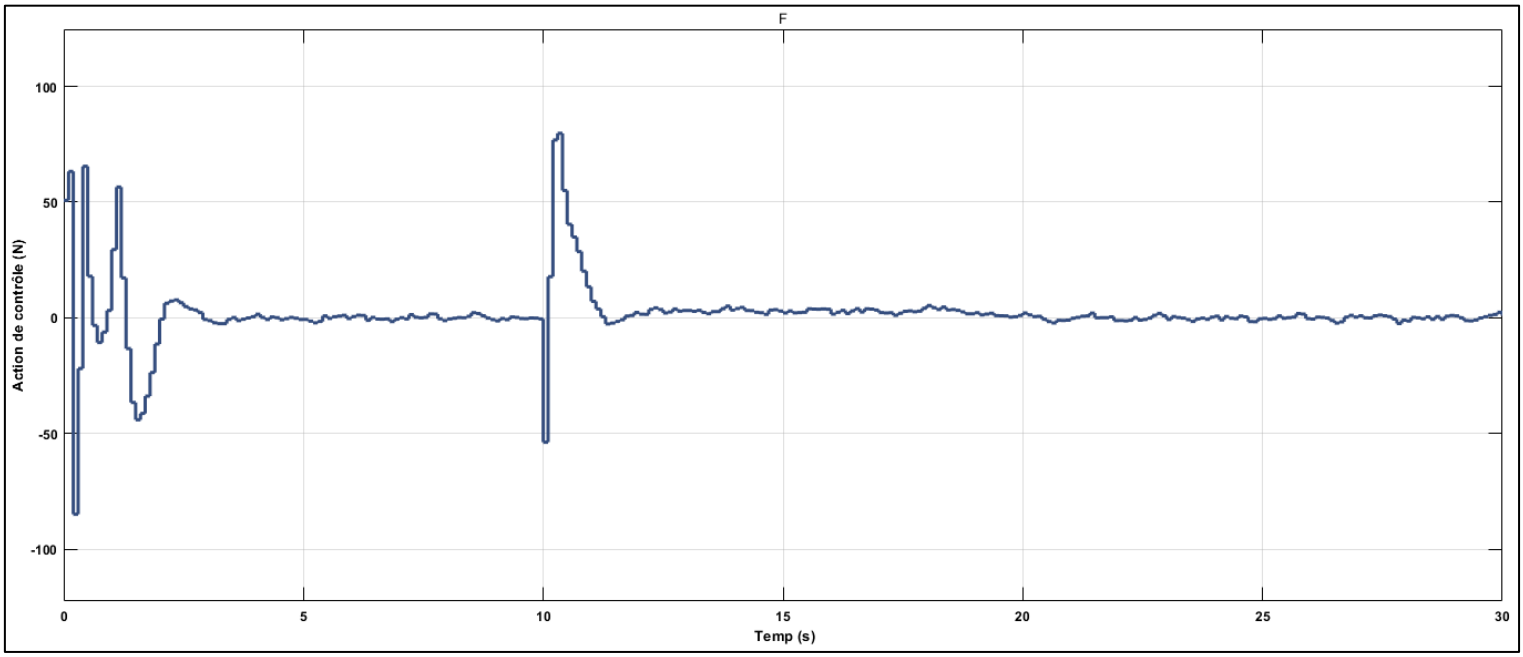

Figure V.5 : Action de contrôle pour le test de régulation.

Les figures présentent l'évolution temporelle (de 0 à 30 secondes) des variables d'état du système pendule inversé sur chariot, contrôlé à l'aide d'une commande prédictive non linéaire (NMPC). Le scénario étudié inclut l'application de perturbations extérieures entre T = 10s et T = 12s, ce qui complexifie davantage la manœuvre de redressement (swing-up) du pendule. Malgré ces perturbations, le contrôleur NMPC parvient à suivre avec précision la trajectoire de référence, stabilisant le pendule en position verticale (theta = 0) et ramenant le chariot au centre de la piste (x = 5). Les résultats obtenus mettent en évidence la robustesse, la réactivité et la rapidité de cette méthode de commande, même en présence de dynamiques perturbées. Cette performance confirme l'efficacité du MPC Non-Linéaire (NMPC) dans des conditions de fonctionnement non idéales.

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré l'application de la commande prédictive non linéaire (NMPC) à la résolution de la manœuvre complexe de redressement (swing-up) du pendule inversé, un problème classique mais exigeant dans le domaine des systèmes non linéaires. Cette étude s'inscrit dans une démarche d'analyse approfondie des performances et des avantages qu'offre la NMPC face aux défis posés par la dynamique non linéaire et les perturbations externes.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

1. **Prise en compte efficace des dynamiques non linéaires**

   La NMPC a démontré une capacité remarquable à intégrer et gérer les caractéristiques non linéaires intrinsèques du système. Grâce à son approche basée sur des prédictions et optimisations répétées, elle a non seulement permis d'exécuter la manœuvre de swing-up, mais aussi d'assurer la stabilisation du pendule inversé autour de sa position d'équilibre instable (θ=0\theta = 0) et de ramener le chariot à l'arrêt au centre de la piste.

2. **Résilience face aux perturbations externes**

   L'introduction de perturbations externes simulées dans le système n'a pas compromis les performances du NMPC. Le contrôleur a maintenu la stabilité globale du système tout en respectant les contraintes physiques et opérationnelles. Ces résultats soulignent la robustesse du NMPC, qui s'adapte en temps réel aux variations imprévues, compensant rapidement les effets des perturbations pour préserver l'objectif de commande.

3. **Comparaison avec la MPC linéaire**

   Une comparaison approfondie entre la NMPC et une commande prédictive basée sur un modèle linéaire (MPC linéaire) a mis en lumière les limitations de cette dernière dans des scénarios complexes. La MPC linéaire, bien qu'efficace pour des systèmes fonctionnant dans une plage restreinte ou près d'un point d'équilibre, se révèle inadaptée pour des systèmes comme le pendule inversé, où des dynamiques fortement non linéaires doivent être gérées sur des plages de fonctionnement étendues. La NMPC, en revanche, tire parti de la modélisation non linéaire pour offrir une meilleure précision et une performance supérieure, même dans des conditions difficiles.

Conclusion et Perspectives

Ce chapitre met en évidence la supériorité de la commande prédictive non linéaire (NMPC) pour des scénarios nécessitant un contrôle dynamique sophistiqué. Ses avantages incluent une gestion précise des non-linéarités, une robustesse face aux perturbations, et une capacité à respecter les contraintes même dans des environnements complexes.

Ces caractéristiques font de la NMPC une approche particulièrement adaptée pour des applications avancées, notamment en robotique, où des systèmes instables et multivariables doivent être contrôlés avec précision, ainsi qu'en aérospatiale, où les environnements dynamiques et les exigences de sécurité imposent des méthodes de contrôle robustes et performantes.

Les résultats obtenus ouvrent la voie à de nouvelles perspectives de recherche, notamment :

- **Extension à des systèmes multi-degrés de liberté** : Explorer l'application de la NMPC à des systèmes plus complexes, tels que les robots humanoïdes ou les drones.
- **Optimisation en temps réel** : Améliorer l'efficacité des algorithmes pour réduire les coûts de calcul et garantir une exécution rapide, même pour des systèmes à haute dynamique.
- **Gestion des incertitudes** : Intégrer des mécanismes pour traiter les incertitudes dans les modèles et les perturbations inconnues, renforçant encore la robustesse de la méthode.

Ainsi, la NMPC se positionne comme une technologie clé pour relever les défis actuels et futurs de la commande des systèmes complexes dans divers domaines industriels et scientifiques.

Conclusion Générale

Cette thèse a présenté une étude approfondie sur le contrôle d'un pendule inversé en utilisant la commande prédictive (MPC), en mettant l'accent sur les approches linéaires et non linéaires. Les principales contributions de ce travail peuvent être résumées comme suit :

Une modélisation dynamique détaillée basée sur le formalisme d'Euler-Lagrange, qui a servi de base solide pour la conception des stratégies de commande.

L'application de la MPC linéaire pour la stabilisation du système, démontrant son efficacité dans des environnements modérément non linéaires et soumis à des contraintes.

L'exploration de la NMPC pour des manœuvres complexes, comme le redressement du pendule (swing-up), mettant en évidence sa robustesse et son adaptabilité face aux dynamiques fortement non linéaires.

L'analyse comparative réalisée a montré que la MPC linéaire se distingue par son efficacité en termes de calcul et ses performances satisfaisantes autour du point d'équilibre. Cependant, la NMPC a démontré sa supériorité pour gérer des plages de fonctionnement plus larges et des dynamiques plus complexes. Cette distinction souligne l'importance de sélectionner les stratégies de commande en fonction des exigences spécifiques du système et des scénarios opérationnels.

En outre, cette étude met en évidence l'intérêt des techniques prédictives pour le contrôle des systèmes non linéaires complexes. Elle valide leur pertinence pour des applications industrielles et robotiques, où la précision, la stabilité et la gestion des contraintes sont des critères essentiels.

Les perspectives futures de ce travail pourraient inclure l'intégration de méthodes d'apprentissage adaptatif, telles que l'intelligence artificielle ou le machine Learning, afin d'améliorer la précision des modèles et les capacités prédictives des contrôleurs. Par ailleurs, l'extension de ces techniques à des systèmes multi-agents ou sous-actionnés pourrait représenter une avancée significative dans le domaine. Une telle démarche permettrait de mieux répondre aux défis des systèmes complexes modernes, renforçant ainsi l'impact pratique et théorique des méthodes développées dans cette thèse.

Références Bibliographiques :

1. **Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum System ». Eurocon Ljubljana, Slovenia. 2003.**
2. **Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. Wiley.**
3. **Andrew K. « Standup and stabilization of the inverted pendulum. Submitted to the department of mechanical engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science », Massachusetts Institute of Technology. June 1999**
4. **Kuo, A. D. (2007). The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: A dynamic walking perspective. *Human Movement Science, 26*(4), 617-656.**
5. **Ferhat Lahouzi « Mise en ouevre d'une stratégie de commande neuro flou : apliquation à pendule inversé », mémoire de magister, université mouloud mammeri tizi-ouzou, 16 mars 2011**
6. **Lam J. « Control of an inverted pendulum ». Dept. of Electrical & Computer Engineering, University of California, U.S.A. 2004**
7. **Freddy Mudry « Modelisation et régulation d'un pendule inversé », L'institut d'Automatisation industrielle (iAi) de l'eivd. 2003.**
8. **Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.**
9. **Muskinja N « Swinging up and stabilization of a real inverted pendulum », Fac. Of Electr. Eng. & Comput. Sci., Univ. of Maribor, Slovenia ,13 février 2017**
10. **K. Bdirina, M.S. Boucherit, R. Hedjar, D. Djoudi, H. Naimi, « Nonlinear Predictive Control with Input Constraints of Electrical Wheelchair», The Mediterranean Journal of Measurement and Control, Vol. 10, No 02, 2014.**
11. **Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., & Diehl, M. (2017). *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design* (2nd ed.). Nob Hill Publishing.**
12. **Qin, S. J., & Badgwell, T. A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology. Control Engineering Practice, 11(7), 733-764.**
13. **K. Bdirina, R. Hedjar, M.S. Boucherit, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of cart with Pendulum », International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering IJ-STA, Vol. 6, N° 1, pp. 1724 −1733, 2012.**